

ARCHIVES MANUSCRITES

ARCS PARAMÉTRÉS

Dany-Jack Mercier

Aquarelle de Jack Robart (2004)

ARCHIVES MANUSCRITES

Les documents personnels présentés dans cette collection sont partagés à l'état brut. Il s'agit pour la plupart d'exercices ou de condensés de cours que j'ai utilisés pour préparer l'agrégation interne ou construire des feuilles de TD pour mes étudiants de l'Université des Antilles puis de l'École supérieure du professorat et de l'éducation (ESPE) de Guadeloupe. D'autres documents ont été préparés pour présenter des exposés.

Il s'agit de bons souvenirs que j'ai numérisés pour pouvoir les retrouver facilement, et que je décide de partager avec les visiteurs de MégaMaths.

Un lien vers ce document, permettant de le télécharger en pdf, a été placé dans une des pages de la classification par thèmes proposée sur la page d'accueil de MégaMaths en megamaths.byethost5.com/. Cette adresse est susceptible de changer : si elle ne fonctionne plus, on pourra se connecter à facebook.com/avantimegamaths pour trouver la nouvelle adresse du site.

1) Etudier et représenter graphiquement la courbe plane $\mathcal{C}$ définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = 4\sqrt{2}\sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(On ramènera l'étude à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).
2) Trouver une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
3) Donner deux méthodes différentes permettant de trouver la tangente à au point $M\left(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ obtenu pour la valeur $t = \frac{\pi}{6}$ du paramètre.

Solution :

[0] [uarc0004] Dany-Jack Mercier

1) Etudier et représenter graphiquement

$$\begin{cases} x(t) = 4\sqrt{2}\sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

On se ramènera pour l'étude à $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

* Intervalle d'étude : $[-\pi, \pi]$ à priori, vu la périodicité de $x(t)$ et $y(t)$.

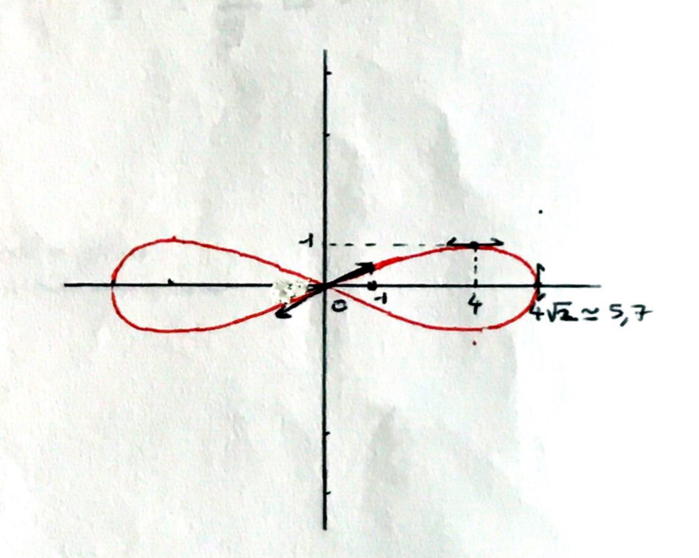
Chgt t en $-t$ montre une symétrie $/_a$ O et permet de se restreindre à $[0, \pi]$

Chgt t en $\pi - t$ " " $/_a$ Ox " " $[0, \frac{\pi}{2}]$

* $\begin{cases} x' = 4\sqrt{2}\cos t \\ y' = 2\cos 2t \end{cases}$

Si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $\begin{cases} x' = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} \\ y' = 0 \iff t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	$4\sqrt{2}$	$+$	|	$+$	0
y'	2	$+$	0	$-$	-2
x	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$4\sqrt{2} \simeq 5,7$
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



* Pas de points stationnaires.

* Origine : point d'inflexion car

$$M'(0) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \quad M''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M^{(3)}(0) = \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ -8 \end{pmatrix}$$

et $(M'(0), M^{(3)}(0))$ sont indépendants.

2)

$\rightarrow$

$$\begin{cases} x \sout{x(t)} = 4\sqrt{2}\sin t \\ y = 2\sin t\cos t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 32\sin^2 t \\ y^2 = 4\sin^2 t\cos^2 t \end{cases}$$ ~~$= 32\cos^2 t = y^2$~~

$$\Rightarrow y^2 = 4\frac{x^2}{32}\cdot\cos^2 t$$

$$y^2 = \frac{x^2}{8}\cos^2 t$$

$$\begin{cases} \sin^2 t = \dfrac{x^2}{32} \\ \cos^2 t = \dfrac{8y^2}{x^2} \end{cases}$$

~~$\sin t \neq 0$~~

(**) $$\frac{x^2}{32} + \frac{8y^2}{x^2} = 1$$

(*) $$\frac{x^4}{32} + 8y^2 - x^2 = 0$$ marche avec $x = 0$.

• Réc., si $M(x,y)$ vérifie (*), i.e. (**) (avec $x \neq 0$), il existe $t \in \mathbb{R}$ tq $\frac{x}{4\sqrt{2}} = \sin t$ (car $\left|\frac{x^2}{32}\right| \leq 1$).

En remplaçant, on trouve : $\frac{8y^2}{x^2} = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ d'où $8y^2 = 32\sin^2 t\cos^2 t \Leftrightarrow y^2 = 4\sin^2 t\cos^2 t$.

[uarc0004] 3

Donc $y = \pm 2\sin t\cos t$. Si $y = 2\sin t\cos t$, c'est OK, Sinon $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\sin(\pi - t) \\ y = -2\sin t\cos t = 2\sin(\pi - t)\cos(\pi - t) \end{cases}$ et encore $M \in \mathcal{C}$.

5) 4s [uanc0004]

$t = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{cases} x' = 4\sqrt{2}\cos t \\ y' = 2 \cos 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6} \\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 1 \end{cases}$$

pente : $\frac{y'}{x'} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$

$$\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2} \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

~~$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{16}$~~ ...

~~$\frac{\partial f}{\partial y} =$~~

$$f(x,y) = \frac{x^4}{32} + 8y^2 - x^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{8}x^3 - 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 16y \end{cases}$$

$M_0\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{1}{8} \cdot 8 \cdot \sqrt{2}^3 - 4\sqrt{2} = -2\sqrt{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \end{cases}$$

T = tgte en M_0 ⟶ $-2\sqrt{2}(x - 2\sqrt{2}) + 8\sqrt{3}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

$-\sqrt{2}(x - 2\sqrt{2}) + 4\sqrt{3}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

vect. dir. $\vec{u}(4\sqrt{3}, \sqrt{2})$, pente : $\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ (oui)

× Le plan affine est rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et a désigne un réel strictement positif fixé à l'avance. Etudier et représenter la cubique C d'équation cartésienne $y^2+axy=x^3$ (Ind. On pourra paramétrer la courbe C en la coupant avec des droites de pente t passant par $O$$, et donner la représentation graphique de C lorsque a = 3)

Solution :

[0] [uarc0005] Dany-Jack Mercier

× Le plan affine est rapporté à un repère $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et a désigne un réel fixé à l'avance. Etudier et représenter la cubique C d'équation cartésienne $y^2+axy=x^3$. strict. positif

---

Solution :

Posons $y = tx$. Alors :

$$y^2+axy=x^3 \iff t^2x^2+atx^2=x^3 \iff x=t^2+at$$

dès que $x \neq 0$.

Le seul point de C d'abscisse $x=0$ est le point $O(0,0)$. Tous les points de la cubique C, sauf éventuellement l'origine O, seront donc donnés par l'arc paramétré :

$$(x,y)=(t^2+at,\ t^3+at^2)$$

On a : $\begin{cases} x' = 2t+a \\ y' = 3t^2+2at = t(3t+2a) \end{cases}$

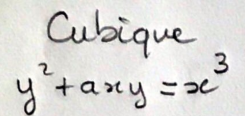
d'où le tableau de variation

t	$-\infty$		$-\frac{2a}{3}$		$-\frac{a}{2}$		0		$+\infty$
x'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	↘	$-\frac{2a^2}{9}$	↘	$-\frac{a^2}{4}$	↗	0	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{4a^3}{27}$	↘	$\frac{a^3}{8}$	↘	0	↗	$+\infty$

---

[0] [uarc0005] Dany-Jack Mercier

(Dessin pour $a=3$)



y, x ; $\frac{4a^3}{27} = 4$; $\frac{a^3}{8} = \frac{27}{8}$; $-\frac{a^2}{4} = -\frac{9}{4}$; $-\frac{2a^2}{9} = -2$; 1 ; 2 ; 3 ; 4

(Dessin avec $a = 3$)

• Branches infinies : Si $t \to \pm\infty$, on trouve $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \to \pm\infty} t = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = +\infty$. La courbe C admet donc une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y (mais aucune asymptote) [cf rappels sur les branches infinies en carc0003]

On considère la courbe plane d'équation cartésienne $x^3+y^3-3axy=0$
En posant $y=tx$ déterminer une représentation paramétrique de cette courbe.
Etudier et représenter graphiquement la courbe paramétrée pour $a=1$. On pourra réduire l'ensemble d'étude par le changement $t \mapsto \frac{1}{t}$.

---

* En remplaçant $y=tx$ dans $\mathcal{C}: x^3+y^3-3axy=0$, on obtient

$$x^3+t^3x^3-3atx^2=0$$

Si $x=0$, $y=tx=0$ et l'on obtient l'origine $\binom{0}{0}$ qui appartient bien à la courbe $\mathcal{C}$. Sinon :

$$x=\frac{3at}{1+t^3} \qquad (\text{avec } t\neq -1)$$

<u>NB</u> : Si $t=-1$, ie $y=-x$ (2e bissectrice), $\mathcal{C}$ devient $0=-3ax^2$
d'où les 2 cas :
α) <u>Si $a=0$</u>, toute la 2e biss. $y=-x$ est dans la courbe. En fait, si $a=0$, $\mathcal{C}: x^3+y^3=0 \Leftrightarrow x=-y$ (...)
β) <u>Si $a\neq 0$</u>, la 2e bissectrice rencontre la courbe en O seulement.

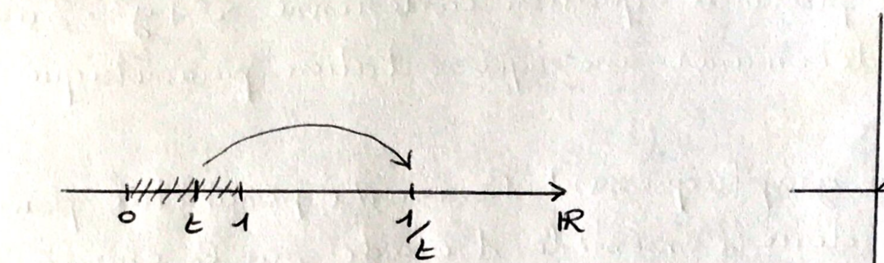
* Faisons $a=1$. On doit étudier :

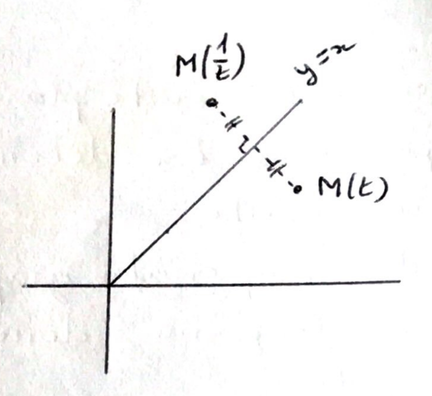
$$\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

* <u>Réduction de l'ensemble d'étude</u> :

On vérifie que $\begin{cases} x\left(\frac{1}{t}\right)=y(t) \\ y\left(\frac{1}{t}\right)=x(t) \end{cases}$ de sorte que le point $M\left(\frac{1}{t}\right)$ se déduise de $M(t)$ par symétrie /à la 1e bissectrice.

(Deug 1e année 93-94)





Ccl : on étudie sur]-1,1] puis on complète par symétrie / à la 1ère bissectrice

* $\begin{cases} x'(t) = 3\,\dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} \\ y'(t) = 3\,\dfrac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \end{cases}$

t	-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		1
x'		$+$		$+$	0	$-$	$-\frac{3}{4}$
y'		$-$	0	$+$		$+$	$\frac{3}{4}$
x	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \simeq 1{,}6$	↘	$\frac{3}{2}$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$\sqrt[3]{2} \simeq 1{,}3$	↗	$\frac{3}{2}$

* Il n'y a pas de point stationnaire.

* tgte en $A\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$?

La symétrie / à la 1- bissectrice semble indique que cette tgte sera perp. à (OA). Vérifions-le :

$\overrightarrow{OM}'(1) = \begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ -3/4 \end{pmatrix}$ est orthogonal à la 1- bissectrice.

(à compléter par sym. /à $y=x$)

* <u>Branche infinie pour $t \to -1_+$</u> : Lorsque t tend vers -1_+,

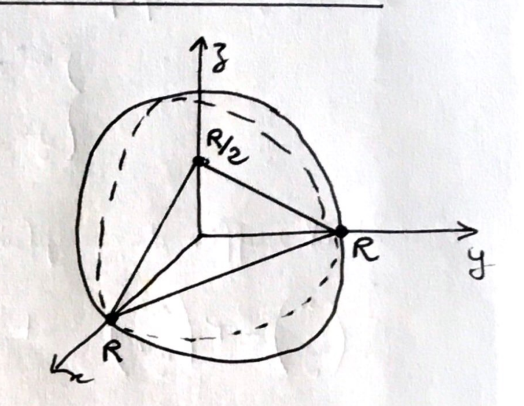
$$\frac{y(t)}{x(t)} = t \to -1$$

$$y(t) + x(t) \doteq \frac{3t}{1-t+t^2} \to -1$$

de sorte que la droite $y=-x-1$ soit asymptote à $\mathcal{C}$ pour $t \to -1$.

Paramétrer le cercle (C) d'équations :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x+y+2z = R \end{cases}$$



Idée : On projette ce cercle sur le plan xOy (ce qui revient à éliminer z d'entre ces équations) pour obtenir une ellipse (E). On cherche ensuite la forme réduite de (E) dans un repère orthonormal puis on paramètre par $x = a\cos t$ et $y = b\sin t$.

$z = \frac{1}{2}(R-x-y)$ d'où $x^2+y^2+\frac{1}{4}(R-x-y)^2 = R^2$

et en simplifiant :

$$(E) : \quad 5x^2+5y^2+2xy-2Rx-2Ry-3R^2=0$$

La matrice de la forme quadratique $q(x,y) = 5x^2+5y^2+2xy$ est $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et ses valeurs propres 6 et 4. Une base orthonormale formée de vecteurs propres de M est donc $\left(\vec{e}_1{}' \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{e}_2{}' \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$. La matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{(rotation d'angle } \tfrac{\pi}{4}\text{)}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ de sorte que l'équation de (E) devienne :

$$6x'^2+4y'^2-2R\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x'\right)-3R^2=0$$

$$6x'^2+4y'^2-2\sqrt{2}.Rx'-3R^2=0$$

que l'on réduit avec la méthode de Gauss. On trouve :

$$(E) : \quad 6\underbrace{\left(x'-\frac{\sqrt{2}}{6}R\right)}_{x''}{}^2 + 4y'^2 = \frac{10}{3}R^2$$

$$(y''=y')$$

(inspiré du Serfati IV.3.4 où l'on avait $x+y+z=R$ au lieu de $x+y+2z=R$)

$$(E) : \frac{x''^2}{\frac{5}{9}} + \frac{y''^2}{\frac{5}{6}} = 1$$ dans le nouveau repère $\mathcal{R}''$.

Dans $\mathcal{R}''$, les éq. paramétrées de (E) seront, par exemple :

$$\begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{5}}{3} \sin t \\ y'' = \sqrt{\frac{5}{6}} \cos t \end{cases}$$

Et il suffit de remplacer pour obtenir x, y puis z en fonction de t. On utilise :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x'' + \frac{\sqrt{2}}{6} R \\ y' = y'' \end{cases}$$

et on obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{10}}{6} \sin t - \frac{\sqrt{15}}{6} \cos t + \frac{R}{6} \\ y = \frac{\sqrt{10}}{6} \sin t + \frac{\sqrt{15}}{6} \cos t + \frac{R}{6} \end{cases}$$

puis $z = \frac{1}{2}(R - x - y) = \frac{R}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6} \sin t$.

Etudier et représenter l'arc paramétré :

$$x = \frac{t^2-1}{t} \qquad y = \frac{t+1}{t(t-1)}$$

$$* \begin{cases} x' = \dfrac{t^2+1}{t^2} > 0 \\ y' = -\dfrac{t^2+2t-1}{t^2(t-1)^2} = -\dfrac{(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})}{t^2(t-1)^2} \end{cases}$$

t	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		0		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
x'		$+$		$+$	‖	$+$		$+$		$+$	
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
x	$-\infty$	↗	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2	↗	0	↗	$+\infty$
y	0	↘	$2\sqrt{2}-3$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-2\sqrt{2}-3$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0
			$\simeq -0{,}17$				$\simeq -5{,}8$				

x' ne s'annule jamais, donc il n'y a pas de points stationnaires.

* Etude pour $t \to 0$:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{(t-1)^2} \quad \text{donc} \quad \lim_{t\to 0} \frac{y}{x} = 1$$

$$y - x = \frac{t+1}{t(t-1)} - \frac{t^2-1}{t} = \frac{t+1-(t^2-1)(t-1)}{t(t-1)} = \frac{2+t-t^2}{t-1} \longrightarrow -2 \quad (t \to 0)$$

La dte $y = x - 2$ sera asymptote à la courbe pour $t \to 0$.

* La courbe coupe l'asymptote pour une valeur du paramètre t tel que :

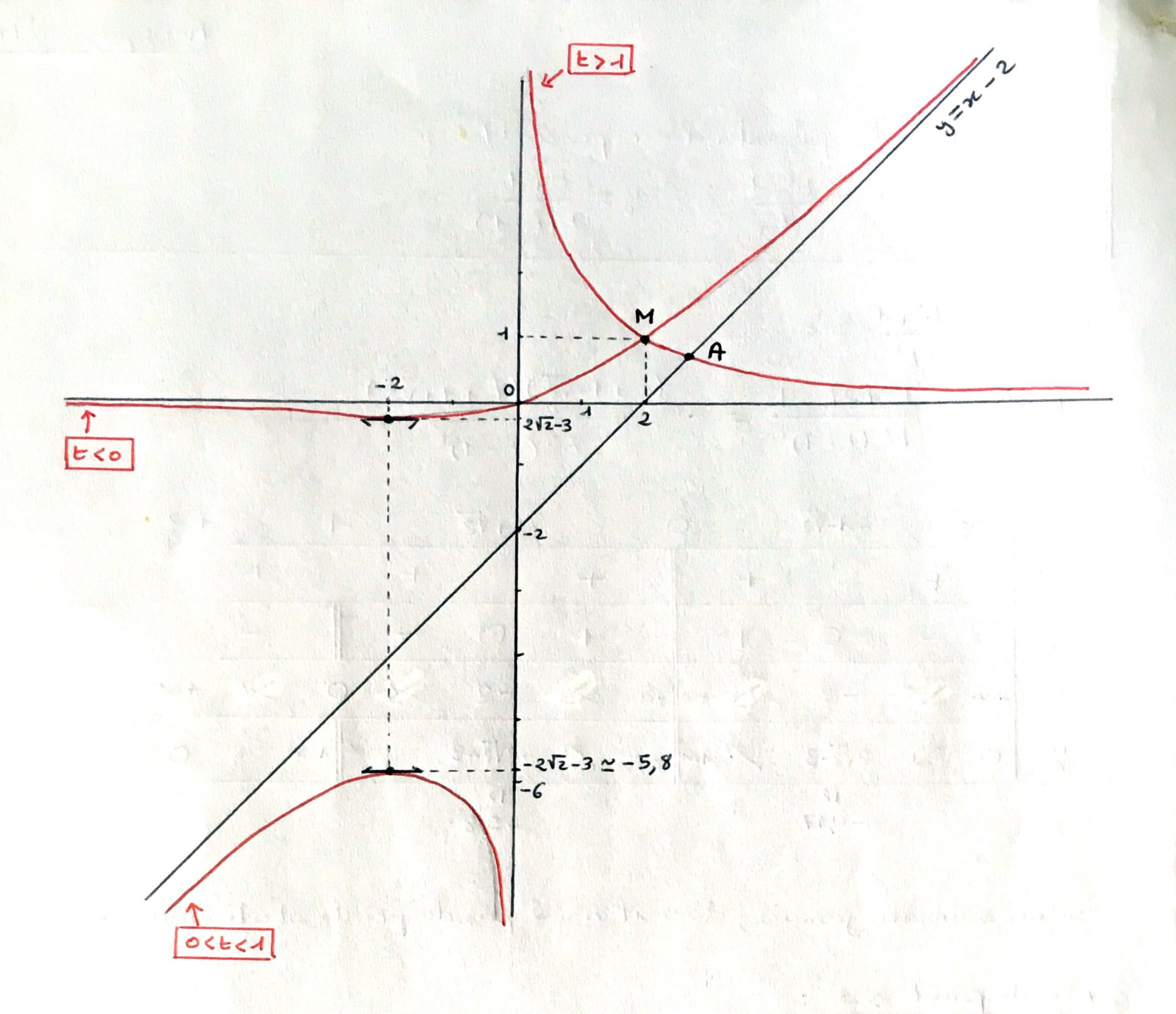
$$y(t) = x(t) - 2 \quad \text{ie} \quad \frac{t+1}{t(t-1)} = \frac{t^2-1}{t} - 2 .$$

On trouve $t = 3$. Le pt d'intersection avec l'asymptote est $A\begin{pmatrix} 8/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

* Points doubles ?

On résout
$$\begin{cases} \dfrac{t_1^2-1}{t_1} = \dfrac{t_2^2-1}{t_2} & (1) \quad \text{où } t_1 \neq t_2 . \\ \dfrac{t_1+1}{t_1(t_1-1)} = \dfrac{t_2+1}{t_2(t_2-1)} & (2) \end{cases}$$

(réf. Deug 1ère année 92-93)



$(1) \Rightarrow (t_1 t_2 + 1)(t_1 - t_2) = 0 \Rightarrow t_1 t_2 = -1$

Et l'on reporte dans (2) :

$$t_2 = -\frac{1}{t_1} \quad \text{et} \quad \frac{t_1+1}{t_1(t_1-1)} = \frac{-\frac{1}{t_1}+1}{-\frac{1}{t_1}\left(-\frac{1}{t_1}-1\right)}$$

d'où $\dfrac{t_1+1}{t_1(t_1-1)} = \dfrac{(t_1-1)t_1}{t_1+1} \Rightarrow \left(\dfrac{t_1+1}{t_1(t_1-1)}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{t_1+1}{t_1(t_1-1)} = \pm 1$

1er cas : $\dfrac{t_1+1}{t_1(t_1-1)} = -1 \Leftrightarrow \cancel{t_1} + 1 = -t_1^2 + \cancel{t_1}$ impossible.

2e cas : $\dfrac{t_1+1}{t_1(t_1-1)} = 1 \Leftrightarrow t_1^2 - 2t_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1 \pm \sqrt{2}$

on trouve $\begin{cases} t_1 = 1+\sqrt{2} \\ t_2 = -\dfrac{1}{t_1} = -\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2} \end{cases}$

Réciproquement, c'est vrai. L'unique pt dble sera donc $M\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ obtenu pour $t = 1+\sqrt{2}$ (ou $t = 1-\sqrt{2}$).

Etude de l'arc paramétré :

$$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos 3t \end{cases}$$

On précisera en particulier les intersections de cette courbe et de l'axe des abscisses.

Période 2π, donc étude sur $[-\pi, \pi]$

$\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$ $\Rightarrow$ étude sur $[0, \pi]$ puis sym. /à Oy

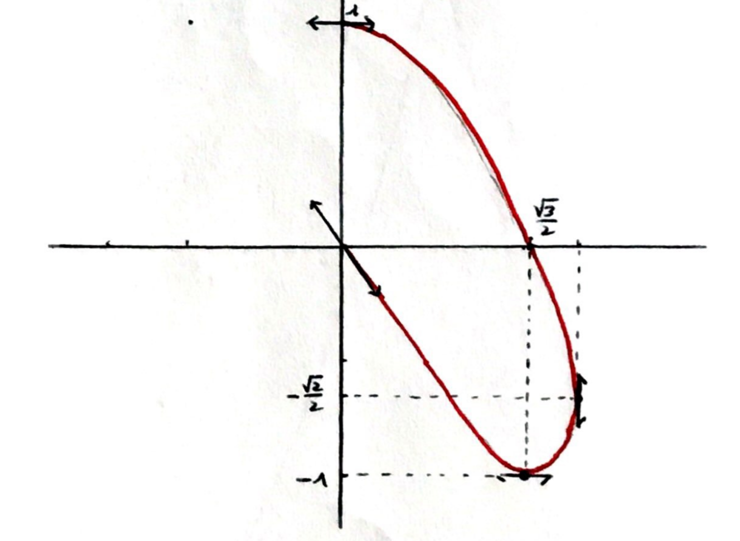
$\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}$ $\Rightarrow$ étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puis sym. /à O

$\begin{cases} x'(t) = 2\cos 2t \\ y'(t) = -3\sin 3t \end{cases}$ de sorte que pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$x'(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \iff t = \frac{\pi}{4}$

$y'(t) = 0 \iff t = k\frac{\pi}{3} \iff t = 0$ ou $\frac{\pi}{3}$

t	0		$\pi/4$		$\pi/3$		$\pi/2$
x'		$+$	0	$-$		$-$	-2
y'	0	$-$		$-$	0	$+$	3
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}86$	$\searrow$	0
y	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq -0{,}7$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0



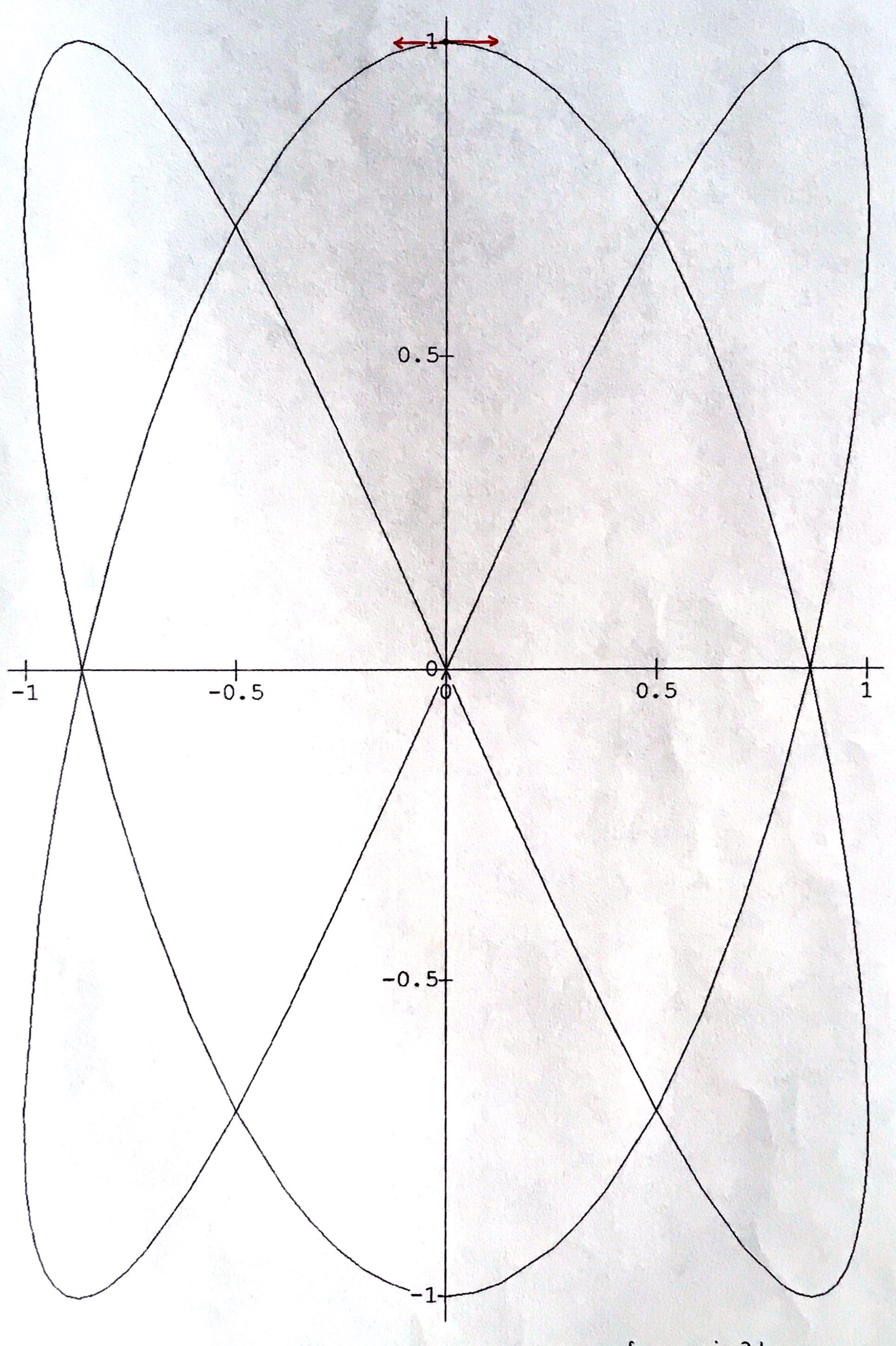
Pas de pts singuliers.

(à compléter par sym. /à O puis par sym. /à Oy.)

* Intersections avec l'axe des abscisses :

$\cos 3t = 0 \iff t = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \iff t = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{2}$

On trouve $M(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M(\frac{\pi}{6}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos 3t \end{cases}$$

obtenu par Maple V

Etudier et tracer l'arc paramétré γ défini par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t\ (1+2\sin^2 t) \\ y(t) = \sin t\ (1+2\cos^2 t) \end{cases}$$

1) * Période 2π

* $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ donc symétrie /à Ox

* $\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$ donc sym. /à Oy

* $\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = y(t) \\ y\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = x(t) \end{cases}$ donc sym. /à la première bissectrice Δ

On étudiera donc γ pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, puis on complètera le tracé par symétrie /à Δ, puis sym. /à Oy puis /à Ox. (En fait, l'ordre de ces sym. importe peu car, laissant toutes O fixe, elles commuteront).

2) $\begin{cases} x'(t) = 3\sin t \cos 2t \\ y'(t) = 3\cos t \cos 2t \end{cases}$ $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$x'(t)$ s'annule en 0 et $\frac{\pi}{4}$.

$y'(t)$ " en $\frac{\pi}{4}$.

	0		$\pi/4$
x'	0	+	0
y'	3	+	0
x	1	↗	$\sqrt{2}$
y	0	↗	$\sqrt{2}$

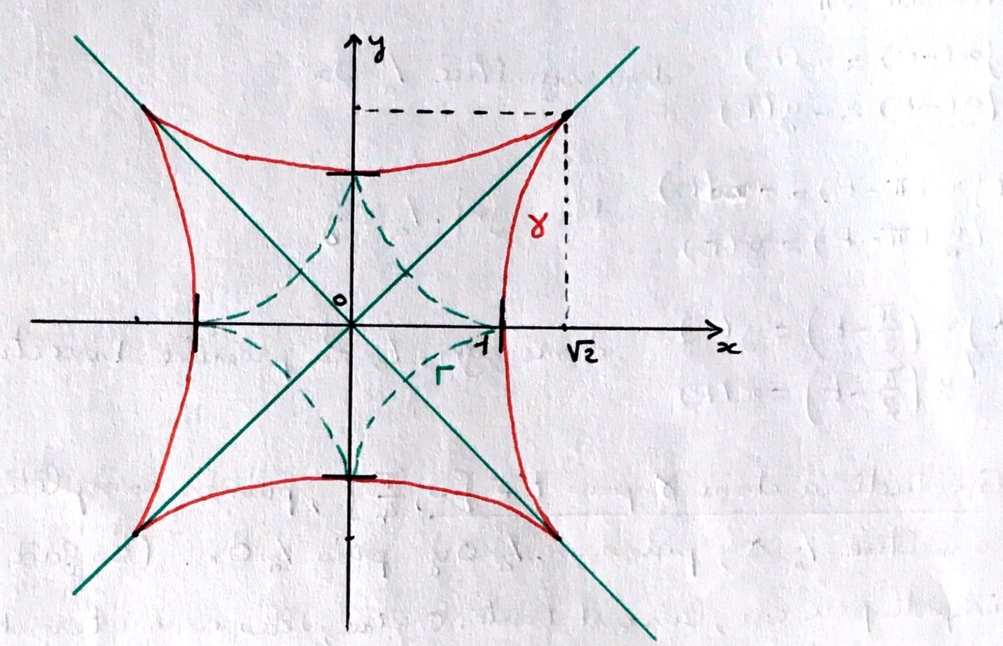
$M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est l'unique point stationnaire de γ. On calcule :

$$\begin{cases} x'' = 3\cos t \cos 2t + 3\sin t\,(-2\sin 2t) \\ y'' = 3(-\sin t)\cos t + 3\cos t\,(-2\sin 2t) \end{cases}$$

(inspiré des Mines de Douai / Sarfati IV.3.2)

d'où $\begin{cases} x''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\sqrt{2} \\ y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\sqrt{2} \end{cases}$

La tangente à γ en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est donc la dte Δ. Ce point est un point de rebroussement ~~de première espèce~~ car $\vec{F}''\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq \vec{0}$, de première espèce d'après le tracé et les symétries.



NB : γ est l'image de "l'Astroïde" Γ dessinée en tirés, correspondant à l'arc paramétré $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$, par la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Etudier et tracer l'arc paramétré $(C) : \begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b) Déterminer une droite qui soit à la fois tangente et normale à l'arc (C).

a) $\begin{cases} x'(t) = 6t \\ y'(t) = 6t^2 \end{cases}$

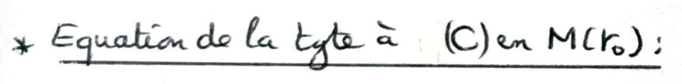
t	$-\infty$		0		$+\infty$
$x(t)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
$y(t)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

* Le chgt $t \mapsto -t$ montre une symétrie par rapport à l'axe des x. Il suffit d'étudier cet arc pour $t \in \mathbb{R}_+$.

* Seul le pt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stationnaire. $\vec{F}''(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 12t \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F}''(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc la tgt à C en $M(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est horizontale. $\vec{F}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{F}''(0) \wedge \vec{F}'''(0) \neq \vec{0}$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un pt de rebroussement de 1ère espèce.

* $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{2}{3} t \to +\infty$

b) Soient t_0 et t_1 des réels non nuls.



* Equation de la tgte à (C) en $M(t_0)$:

$$\begin{vmatrix} x - 3t_0^2 & 6t_0 \\ y - 2t_0^3 & 6t_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{t_0 x - y - t_0^3 = 0} \quad (1)$$



* Equation de la normale à (C) en $M(t_1)$:

$$6t_1 (x - 3t_1^2) + 6t_1^2 (y - 2t_1^3) = 0$$

$$\boxed{x + t_1 y - 3t_1^2 - 2t_1^4 = 0} \quad (2)$$

On cherche une droite (D) dont l'équation soit à la fois (1) et (2), ie t_0 et t_1 tels que $\begin{cases} t_0 t_1 = -1 \\ t_0(-3t_1^2 - 2t_1^4) = -t_0^3 \end{cases} \Rightarrow t_0^3 - 3t_0^2 - 2 = 0$

(réf. Serfati IV.3.3)

On résout $X^3 - 3X - 2 = 0$. -1 étant racine évidente, cette équation équivaut à $(X+1)^2(X-2) = 0$. D'où $t_0^2 = 2 \Rightarrow t_0 = \varepsilon\sqrt{2}$ $(\varepsilon = \pm 1)$.

Ccl : Il y a 2 droites répondant à la question, d'équations :

$$\varepsilon\sqrt{2}\,x - y - \varepsilon\, 2\sqrt{2} = 0$$

ie $$\sqrt{2}\,x - \varepsilon y - 2\sqrt{2} = 0$$

et évidemment symétriques / à Ox.

Etudier et représenter la courbe :

$$\begin{cases} x = e^t - t \\ y = \operatorname{ch} t - \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

* $\begin{cases} x' = e^t - 1 \\ y' = \operatorname{sh} t - t \end{cases}$ d'où :

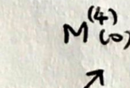
t	$-\infty$		0		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

* Un seul pt stationnaire : $M(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} x'' = e^t \\ y'' = \operatorname{ch} t - 1 \end{cases} \Rightarrow M''(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x''' = e^t \\ y''' = \operatorname{sh} t \end{cases} \Rightarrow M'''(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x^{(4)} = e^t \\ y^{(4)} = \operatorname{ch} t \end{cases} \Rightarrow M^{(4)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



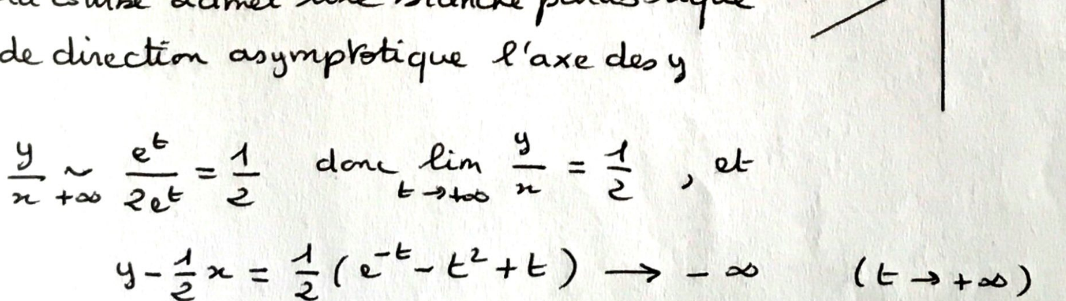
La tgte en $M(0)$ est donc horizontale, et $M(0)$ est un pt de rebroussement de 2ᵉ espèce.

* Branches infinies

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{e^t + e^{-t} - t^2}{2}}{e^t - t} = \frac{e^t + e^{-t} - t^2}{2e^t - 2t}$$

$\frac{y}{x} \underset{-\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{-2t}$ donc $\lim_{t \to -\infty} \frac{y}{x} = +\infty$ et

la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y



$\frac{y}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^t}{2e^t} = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{t \to +\infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$, et

$$y - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(e^{-t} - t^2 + t) \longrightarrow -\infty \qquad (t \to +\infty)$$

Il y aura donc une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$, pour $t \to +\infty$.

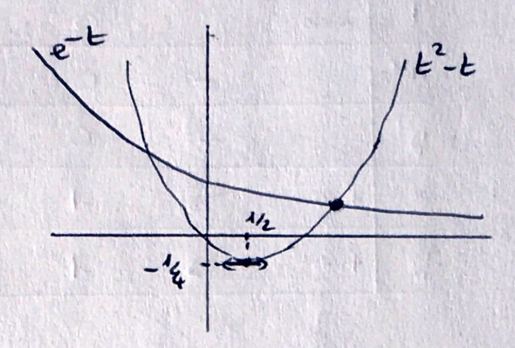
.../...

(Deug 1ʳᵉ année 92-93, 93-94)

* La courbe coupe la droite $y = \frac{1}{2}x$ en un unique point, puisque

$$y(t) = \frac{1}{2}x(t) \iff \operatorname{ch} t - \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}(e^t - t) \iff e^{-t} = t^2 - t$$

et que l'équation $e^{-t} = t^2 - t$ admet une unique solution t dans $\mathbb{R}_+$:



Etude et rep. graphique de :

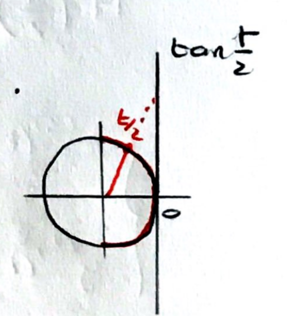
$$\begin{cases} x(t) = a\left(\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right) + \cos t\right) \\ y(t) = a \sin t \end{cases}$$

* **Réduction de l'intervalle d'étude :**

x et y sont périodiques de période 2π, donc $t \in [-\pi, \pi]$.

$\tan\frac{t}{2} > 0$ et $\frac{t}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \iff \frac{t}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$\iff t \in]0, \pi[$



Enfin $\begin{cases} x(\pi - t) = a\left(\ln\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) - \cos t\right) \\ \qquad = a\left(\ln\cot\frac{t}{2} - \cos t\right) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$

montre une symétrie /à Oy.

Ccl : Etude sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et symétrie /à Oy.

* $\begin{cases} x'(t) = a\dfrac{\cos^2 t}{\sin t} \\ y'(t) = a\cos t \end{cases}$ seront > 0 pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$

t	0		$\frac{\pi}{2}$
x'	‖	+	0
y'		+	0
x	‖ $-\infty$	↗	0
y	0	↗	a

NB : On suppose $a > 0$.
Sinon, sym /à O.

(Deug 1-année 93-94)

* <u>tangente en $M(\frac{\pi}{2})$? Étude locale</u>.

$$\begin{cases} x''(t) = -a\,\dfrac{(1+\sin^2 t)\cos t}{\sin^2 t} \\ y''(t) = -a \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y''(\frac{\pi}{2}) = -a \end{cases}$$

$M''(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}$ dirigera la tgte en $t = \frac{\pi}{2}$, qui sera verticale.

$$\begin{cases} x^{(3)}(t) = -a\,\dfrac{(2\sin t\cos t.\cos t - (1+\sin^2 t\sin t)\sin^2 t - (1+\sin^2 t)\cos t.2\sin t\cos t}{\sin^4 t} \\ y^{(3)}(t) = -a\cos t \end{cases}$$

prouve que $M^{(3)}(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $M''(\frac{\pi}{2})$.

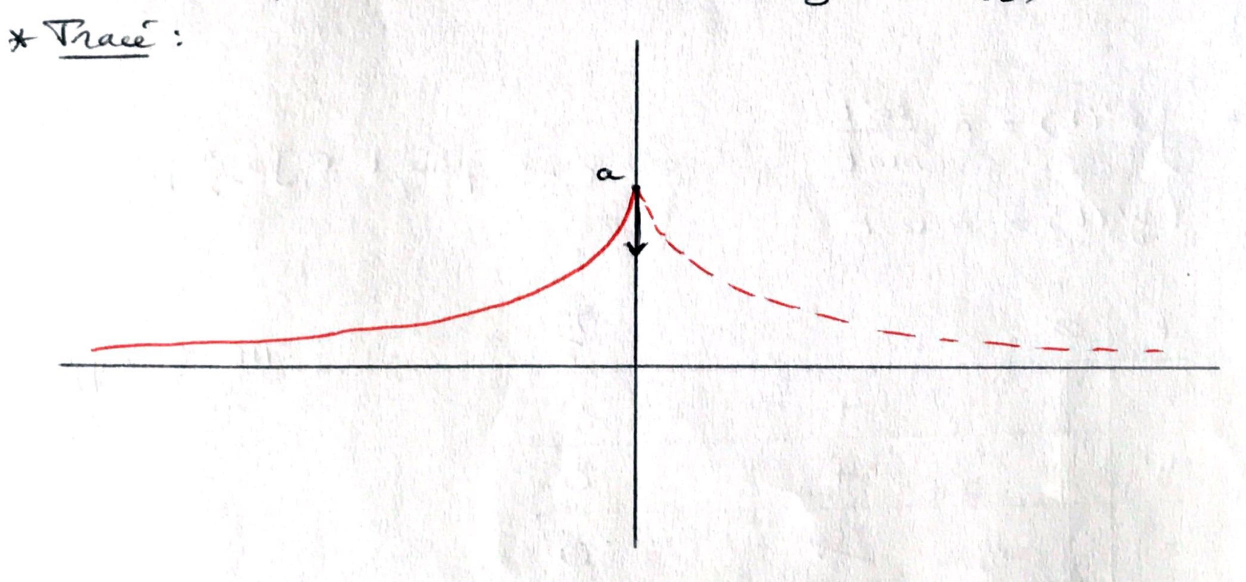
La courbe admet donc un pt de rebroussement de 1ère espèce en $t = \frac{\pi}{2}$:

$M^{(3)}(\frac{\pi}{2})$

$M^{(2)}(\frac{\pi}{2})$

<u>NB</u> : La symétrie $/_{\text{à}}$ Oy prouve que ce pt $M(\frac{\pi}{2})$ ne peut être qu'un pt de rebroussement de 1ère espèce à partir du moment où la tangente en $M(\frac{\pi}{2})$ est verticale.

* <u>Tracé</u> :



(Il paraît que c'est la courbe décrite par la roue arrière d'une voiture qui se gare en marche avant le long d'un trottoir !)

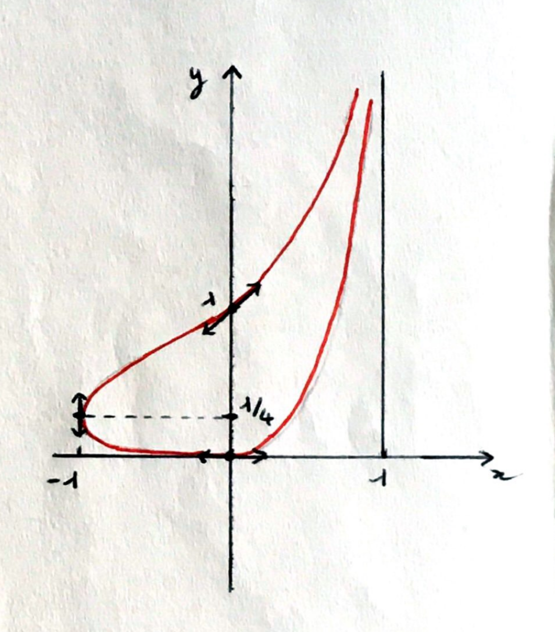
Étude et graphique de l'arc paramétré :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2t}{t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{(t-1)^2} \end{cases}$$

* $t \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et :

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2} & t \in \mathbb{R} \\ y'(t) = \dfrac{2t}{(1-t)^3} & t \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \end{cases}$$

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y'		$-$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
x	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0
y	1	↘	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1



* Pas de pt stationnaire.

* Tangente en $M(+\infty)$ ou $M(-\infty)$ (Points limites) :

$\lim\limits_{t\to\pm\infty} x'(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} y'(t) = 0$ donc pas d'indication sur cette tangente.

Aussi prend-on la pente :

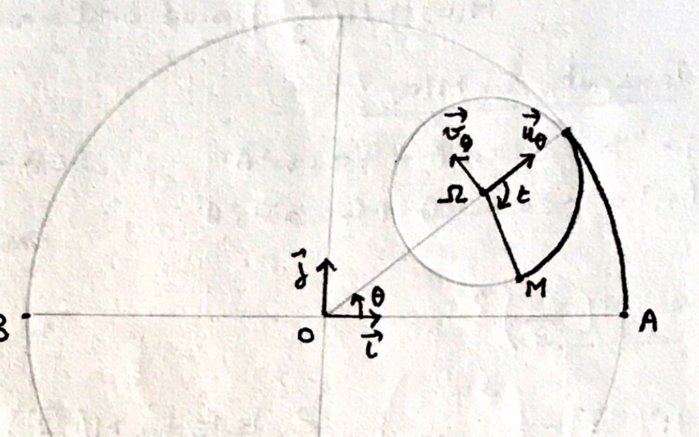
$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 1$$

La tangente en $M(+\infty) = M(-\infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sera donc de pente 1.

Etudier le mvt d'un point situé sur un petit cercle roulant sans glissement à l'intérieur (resp. à l'extérieur) d'un cercle de rayon R.
Dessiner la courbe pour : $r = \frac{R}{3}$ et $r = \frac{R}{4}$ (dans le cas du cercle intérieur)
pour $r = R$ et $r = \frac{R}{2}$ (" " extérieur)

1er cas : Cercle intérieur

OA = R ; r rayon du petit cercle



$$\vec{OM} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega M}$$
$$= (R-r)\vec{u}_\theta + r(\cos(-t)\vec{u}_\theta + \sin(-t)\vec{v}_\theta)$$

Comme $\begin{cases} \vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{v}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$

on en déduit

$$\begin{cases} x(\theta) = (R-r)\cos\theta + r\cos(\theta - t) \\ y(\theta) = (R-r)\sin\theta + r\sin(\theta - t) \end{cases}$$

Comme $rt = R\theta$, on aura :

$$\begin{cases} x(\theta) = (R-r)\cos\theta + r\cos\left(1-\frac{R}{r}\right)\theta \\ y(\theta) = (R-r)\sin\theta + r\sin\left(1-\frac{R}{r}\right)\theta \end{cases}$$

Ces fonctions sont périodiques de période 2π et $\frac{2\pi}{1-\frac{R}{r}}$ si $\frac{R}{r} \in \mathbb{Q}$.

* Cas particuliers : Si $r = \frac{R}{2}$, $y(\theta) = 0$ et $x(\theta) = \frac{R}{2}\cos\theta + \frac{R}{2}\cos\theta = R\cos\theta$.
Le mvt a lieu sur le diamètre [AB].

* Si $r = \frac{R}{3}$, les éq. du mvt sont : $\begin{cases} x = \frac{2R}{3}\cos\theta + \frac{R}{3}\cos 2\theta \\ y = \frac{2R}{3}\sin\theta - \frac{R}{3}\sin 2\theta \end{cases}$

En posant $a = \frac{R}{3}$, on obtient :

$$\begin{cases} x = 2a\cos\theta + a\cos 2\theta \\ y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta \end{cases}$$

x et y sont périodiques de période 2π. $x(\theta)$ est paire et $y(\theta)$ est impaire, donc il suffira d'étudier l'arc pour $\theta \in [0, \pi]$ puis de compléter par symétrie / à Ox.

On a : $\begin{cases} x' = -2a\sin\theta - 2a\sin 2\theta = -2a(\sin\theta + \sin 2\theta) = -4a\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ y' = 2a\cos\theta - 2a\cos 2\theta = 2a(\cos\theta - \cos 2\theta) = 4a\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} \end{cases}$

$x' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = k\frac{2\pi}{3} \text{ soit } \theta = 0 ; \frac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ \theta = \pi + k2\pi \text{ soit } \theta = \pi \end{cases}$ et $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = k2\pi \text{ soit } \theta = 0 \\ \text{ou} \\ \theta = k\frac{2\pi}{3} \text{ soit } \theta = 0 \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

θ	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
x'	0	$-$	0	$+$	0
y'	0	$+$	0	$-$	$-4a$
x	$3a$	$\searrow$	$-\frac{3a}{2}$	$\nearrow$	$-a$
y	0	$\nearrow$	$\frac{3a\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

$a = \frac{R}{3}$

Notons une tgte verticale en $\theta = \pi$.

$\uparrow$ $\qquad$ $\uparrow$

$M(0)$ et $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ sont stationnaires.

Tangentes en $M(0)$?

$$\begin{cases} x'' = -2a\cos\theta - 4a\cos 2\theta \\ y'' = -2a\sin\theta + 4a\sin 2\theta \end{cases}$$

Si $\theta = 0$, $M''(0) = \begin{pmatrix} -6a \\ 0 \end{pmatrix}$ donc la tgte en $M(0)$ sera parallèle à l'axe des x.

en $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$?

$M''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 3a \\ -3a\sqrt{3} \end{pmatrix}$. La tgte en $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ a pour direction $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. C'est la droite $OM\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

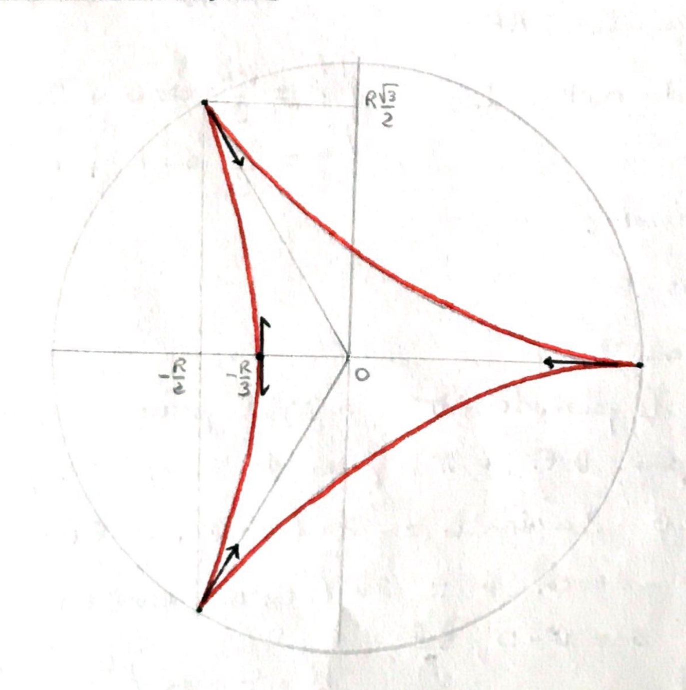
Etude locale en $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$:

$$\begin{cases} x^{(3)}(\theta) = 2a\sin\theta + 8a\sin 2\theta \\ y^{(3)}(\theta) = -2a\cos\theta + 8a\cos 2\theta \end{cases}$$

donc $M^{(3)}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3a\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix} \neq 0$, $\left(M^{(2)}\left(\frac{2\pi}{3}\right), M^{(3)}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ est libre et $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ sera un point de rebroussement de 1e espèce.

D'où la courbe :



> Etudier et tracer l'arc paramétré :
>
> $x = \sin 3t + 3\sin t \qquad y = \cos t + \sin t$
>
> Préciser les pts stationnaires, les tangentes en ces points, les tgtes // aux axes, les pts doubles et les branches infinies.

* t variera de 0 à 2π. Comme $x(\pi+t) = -x(t)$ et $y(\pi+t) = -y(t)$, on mènera l'étude pour $t \in [0, \pi]$ puis on complètera le graphique par symétrie / à O.

* $\begin{cases} x' = 3\cos 3t + 3\cos t \\ y' = -\sin t + \cos t \end{cases}$

$x'(t) = 0 \iff \cos 3t = -\cos t \iff \cos 3t = \cos(\pi - t)$

$\iff \begin{cases} 3t = \pi - t + k2\pi \\ \text{ou} \\ 3t = -\pi + t + k2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ t = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

x' s'annule pour $t = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{4}$

$y'(t) = 0 \iff \sin t = \cos t \iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \iff \begin{cases} \frac{\pi}{2} - t = t + k2\pi \\ \text{ou} \\ \frac{\pi}{2} - t = -t + k2\pi \quad \text{impossible} \end{cases}$

$\iff t = \frac{\pi}{4} + k\pi$

y' s'annule pour $t = \frac{\pi}{4}$.

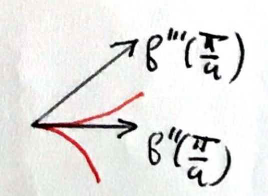
* Point stationnaire $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

$\begin{cases} x'' = -9\sin 3t - 3\sin t \\ y'' = -\cos t - \sin t \end{cases} \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix} -6\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ dirige la tangente.

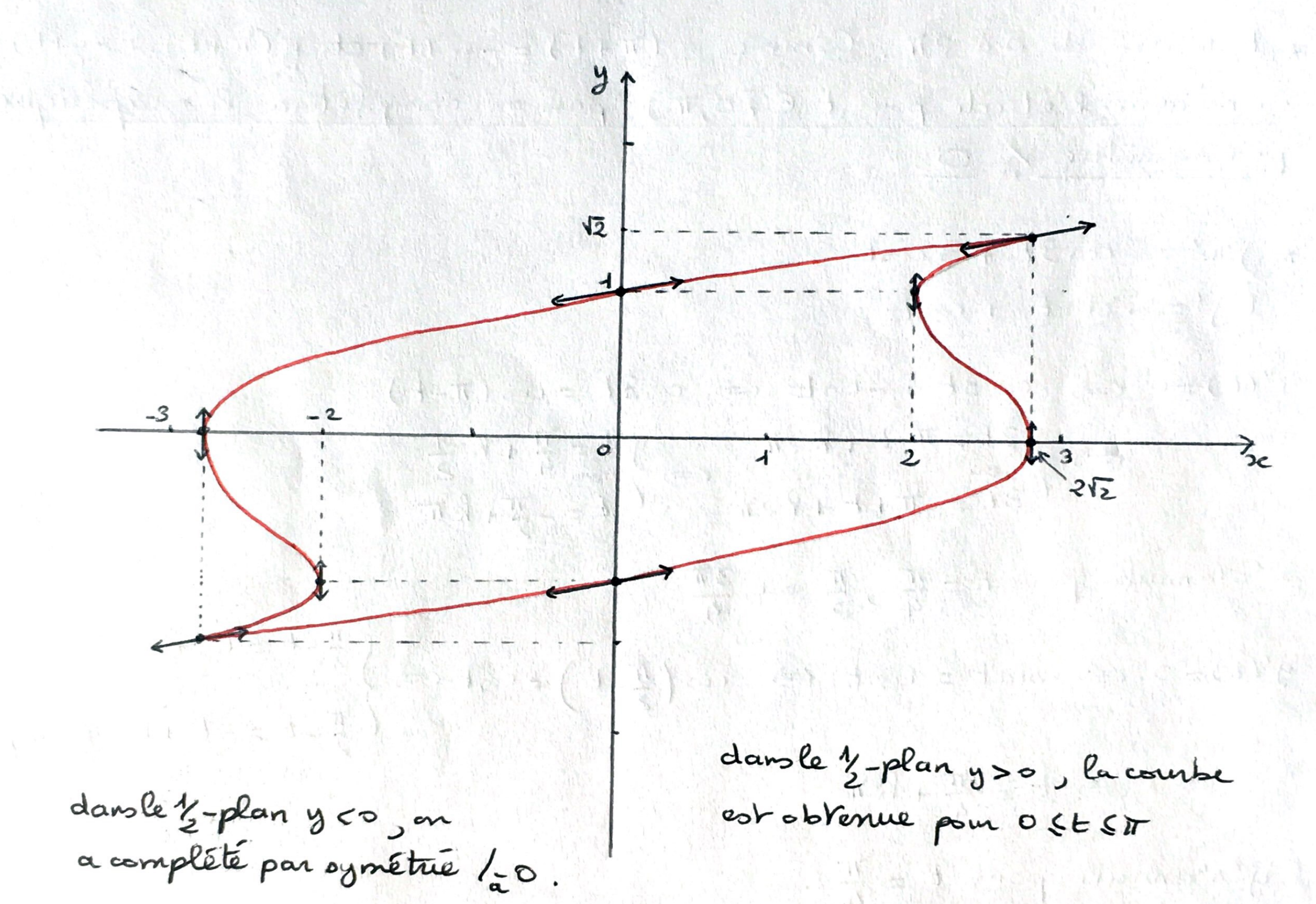
La tangente en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sera de pente $\frac{1}{6}$.

$\begin{cases} x''' = -27\cos 3t - 3\cos t \\ y''' = \sin t - \cos t \end{cases} \Rightarrow f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)\begin{pmatrix} 12\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

On a donc un pt de rebroussement de 1-espèce en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$



t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
x'	6	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	-6
y'	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	$\vert$	$-$	-1
x	0	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0
y	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



Etudier et représenter l'arc paramétré :

$$\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \cos 4t \end{cases}$$

*** Intervalle d'étude**

$t \in [-\pi, \pi]$. Si t est changé en $-t$, x et y sont inchangés. On peut donc se restreindre à $t \in [0, \pi]$.

$$\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$$

0 t π-t π

montre qu'on peut faire varier t dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis compléter par symétrie /à Oy.

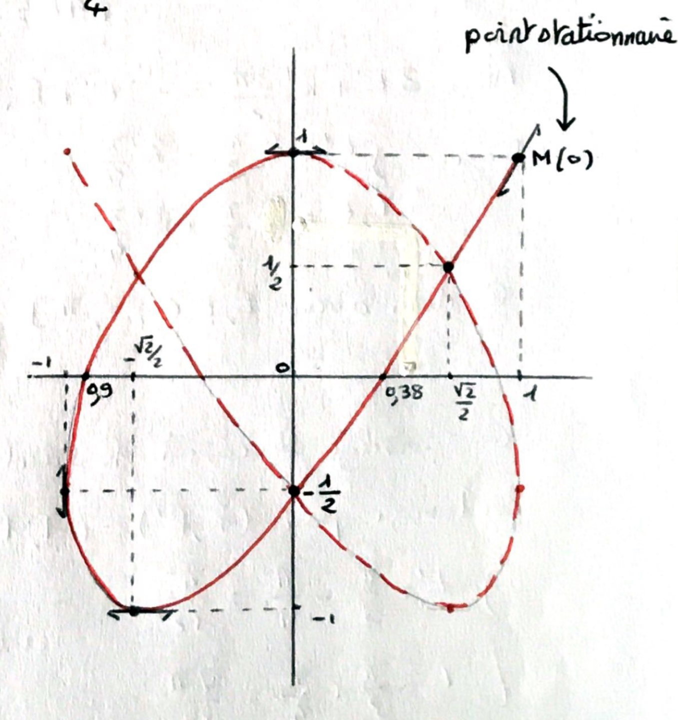
* $\begin{cases} x' = -3\sin 3t \\ y' = -4\sin 4t \end{cases}$

$x' = 0 \Leftrightarrow \sin 3t = 0 \Leftrightarrow 3t = k\pi \Leftrightarrow t = k\frac{\pi}{3}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 4t = 0 \Leftrightarrow 4t = k\pi \Leftrightarrow t = k\frac{\pi}{4}$

*** Tableau de variations :**

t	0		$\pi/4$		$\pi/3$		$\pi/2$
x'	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|
y'	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0
x	1	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}7$	↘	-1	↗	0
y	1	↘	-1	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	1



*** Pt stationnaire pour $t = 0$:**

$\begin{cases} x'' = -9\cos 3t \\ y'' = -16\sin 4t \end{cases}$ donc $\begin{cases} x''(0) = -9 \\ y''(0) = -16 \end{cases}$

La tgte en M(0) est de pente $\frac{16}{9} \simeq 1{,}8$

* <u>Intersection avec Oy :</u>

$x(t)=0 \iff \cos 3t = 0 \iff t = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$

Ici $t = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{2}$.

Les pts d'int. avec Oy sont $M\left(\frac{\pi}{6}\right)\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

* <u>Intersection avec Ox :</u>

$y(t)=0 \iff \cos 4t = 0 \iff t = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$

Ici $t = \frac{\pi}{8}$ ou $\frac{3\pi}{8}$, et on trouve :

$$M\left(\frac{\pi}{8}\right)\begin{pmatrix}\cos\frac{3\pi}{8}\\0\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}0,38\\0\end{pmatrix} \qquad M\left(\frac{3\pi}{8}\right)\begin{pmatrix}\cos\frac{9\pi}{8}\\0\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}-0,92\\0\end{pmatrix}$$

* <u>Pts doubles</u> : Faisons varier t, t' dans $[0,\pi]$ et supposons $t \neq t'$.

$$\begin{cases}\cos 3t = \cos 3t'\\ \cos 4t = \cos 4t'\end{cases} \iff \begin{cases}3t = \pm 3t' + k2\pi\\ 4t = \pm 4t' + k'2\pi\end{cases}$$

On envisage tous les cas. On retrouve ainsi le point double évident sur la figure : $M\left(\frac{\pi}{6}\right)\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Voyons, par ex, le cas où $\begin{cases}3t = -3t' + k2\pi\\ 4t = 4t' + k'2\pi\end{cases} \Rightarrow t = t' + k'\frac{\pi}{2}$

Alors $3t' + k'\frac{3\pi}{2} = -3t' + k2\pi \Rightarrow t' = k\frac{\pi}{3} - k'\frac{\pi}{4}$

Donc $\begin{cases}t' = k\frac{\pi}{3} - k'\frac{\pi}{4}\\ t = k\frac{\pi}{3} + k'\frac{\pi}{4}\end{cases}$

On doit avoir $t, t' \in [0,\pi]$ ie $\begin{cases}0 \leq \frac{k}{3} - \frac{k'}{4} \leq 1\\ 0 \leq \frac{k}{3} + \frac{k'}{4} \leq 1\end{cases} \iff \begin{cases}0 \leq k \leq 3\\ -2 \leq k' \leq 2\end{cases}$

On envisage les cas où k vaut 0, 1, 2 puis 3. Toutes recherches faites, on trouve pour $(k,k') = (1,1)$:

$$\begin{cases}t' = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}\\ t = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}\end{cases}$$ et le point double $M\left(\frac{\pi}{12}\right) = M\left(\frac{7\pi}{12}\right)\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

* <u>Tangentes aux points doubles :</u>

$M\left(\frac{\pi}{12}\right)\begin{cases}x' = -\frac{3}{\sqrt{2}}\\ y' = -2\sqrt{3}\end{cases}$	$M\left(\frac{7\pi}{12}\right)\begin{cases}x' = 3/\sqrt{2}\\ y' = -2\sqrt{3}\end{cases}$	$M\left(\frac{\pi}{6}\right)\begin{cases}x' = -3\\ y' = -2\sqrt{3}\end{cases}$
pente de la tgte : $\frac{2}{3}\sqrt{6} \simeq 1,6$	pente : $-\frac{2}{3}\sqrt{6} \simeq -1,6$	pente : $\frac{2\sqrt{3}}{3} \simeq 1,15$

Exercice 3 (4 pts)

Etudier et représenter graphiquement la courbe paramètre plane $(\mathscr{C})$

définie par : $\begin{cases} x(t) = 3t + \dfrac{1}{t^3} \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$ pour $t \in]0 +\infty[$

On précisera la nature du point stationnaire, ainsi que la pente de la tangente au point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec son asymptote.

Sol : voir au verso.

(réf. partiel de mars 93, M12-Analyse, Deug A1 - 1re année)

Solution :

½ au choix du correcteur

Exercice 3 4 pts

$$\begin{cases} x(t) = 3t + \dfrac{1}{t^3} \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

- Ensemble de définition : $]0\ +\infty[$ donné.

1 • branches

$\lim_{t\to0^+} x(t) = \lim_{t\to0^+} y(t) = +\infty$ nous avons $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^2(t^2+1)}{3t^4+1}$

$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$

$\lim_{t\to0^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$ donc branche parabolique de direction Ox

$\lim_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{1}{3}$ et $\lim_{t\to+\infty} [y(t) - \frac{1}{3}x(t)] = 0$, donc $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote ;

$y(t) - \frac{1}{3}x(t) = \dfrac{3t^2-1}{3t^3} > 0$ qd $t \to +\infty$ courbe au dessus de l'asymptote qd $t \to$

1 • variations

$x'(t) = 3\,\dfrac{t^4-1}{t^4}$

$y'(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2}$

A (4, 2) est stationnaire.

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$		−	0	+	
$x(t)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$
$y'(t)$		−	0	+	
$y(t)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

1 • $x''(t) = 12\,\dfrac{1}{t^5}$ $x'''(t) = -\dfrac{60}{t^6}$ $\vec{M}''_1 \begin{cases} 12 \\ 2 \end{cases}$ $\vec{M}'''_1 \begin{cases} -60 \\ -6 \end{cases}$

$y''(t) = \dfrac{2}{t^3}$ $y'''(t) = \dfrac{-6}{t^4}$

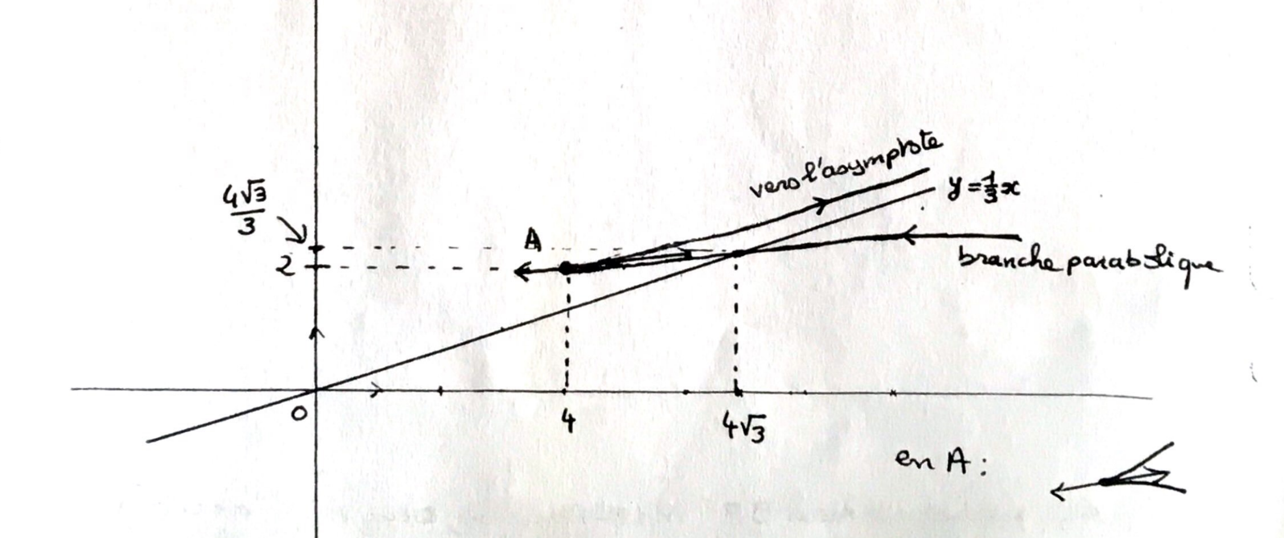
de pt A (4, 2) est un pt de rebroussement de 1ᵉ espèce.

½ • Point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec $y = \frac{1}{3}x$:

l'équation $y(t) - \frac{1}{3}x(t) = 0$ donne $3t^2 - 1 = 0$ soit $t = \frac{1}{\sqrt3}$ pour $t \in]0\ +\infty[$.

B ($4\sqrt3$; $\frac{1}{\sqrt3} + \sqrt3$) La pente de la tangente est : $\dfrac{1}{12}$.

0 pts



Arcs paramétrés

> Soit $\gamma = (I, f)$ un arc paramétré du plan. On suppose f régulier en t_0, ie tel que f soit dérivable en t_0 et $f'(t_0) \neq 0$.
> Vérifier que, sous cette hypothèse, la sécante $(M(t_0)M(t))$ à γ admet une limite quand $t \to t_0$ et que cette limite est la tangente T à γ en $M(t_0)$

$$f : \begin{array}{l} I \longrightarrow E_2 \\ t \longmapsto (x(t), y(t)) = f(t) = M(t) \end{array}$$

Par hypothèse, les limites suiv. existent

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0) \\ \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} = y'(t_0) \end{cases}$$

et la tgte T est définie comme la dte passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$.

Les deux dtes $(M(t_0)M(t))$ et T sont toujours sécantes en $M(t_0)$.
Montrer que $\lim\limits_{t \to t_0} (M(t_0)M(t)) = T$ équivaut alors à montrer qu'il existe un vecteur directeur unitaire $\vec{u}_t$ de $(M(t_0)M(t))$ qui tend vers un vecteur directeur (unitaire) $\vec{u}$ de T.

$$\vec{u}_t = \frac{M(t) - M(t_0)}{M(t_0)M(t)} = \underbrace{\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}}_{\substack{\to f'(t_0) \\ (t \to t_0)}} \cdot \frac{t - t_0}{M(t_0)M(t)}$$

• <u>Si $t > t_0$</u>, $\dfrac{M(t_0)M(t)}{t-t_0} = \dfrac{\sqrt{(x(t)-x(t_0))^2+(y(t)-y(t_0))^2}}{t-t_0}$

$$= \sqrt{\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)^2+\left(\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)^2}$$

$$\longrightarrow \|f'(t_0)\|$$

donc $\lim\limits_{t\to t_0} u_t = \dfrac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$ qui dirige T.

• <u>Si $t < t_0$</u>, $-\vec{u}_t = \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \cdot \dfrac{t_0-t}{M(t_0)M(t)}$, et le m̂ calcul que précédemment prouve que $\lim\limits_{t\to t_0} (-u_t) = \dfrac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$. □

- Arcs paramétrés
- Courbes en polaire
- Différentiabilité des fcts de 2 variables
- Intégrales curvilignes et intégrales doubles.

Mai 94 (chapitres 6 et 7)

Ex ①

Rechercher les points doubles de la courbe définie par : $x_t = 2t + t^2$; $y_t = 2t - t^{-2}$

Ex ②

[U] Arcs param, U39 On considère la courbe plane d'équation cartésienne : $x^3 + y^3 - 3axy = 0$
En posant $y = tx$ déterminer une représentation paramétrique de cette courbe.
Etudier et représenter graphiquement la courbe paramétrée pour $a = 1$
(on pourra réduire l'ensemble d'étude par le changement : $t \rightsquigarrow 1/t$)

Ex ③

Etudier et représenter graphiquement les courbes paramétrées suivantes :

[U] Arcs param. (a) $\begin{cases} x_t = a\cos^3 t \\ y_t = a\sin^3 t \end{cases}$ Montrer que l'on peut étudier la courbe pour $t \in [0\ \pi/4]$ $a \in \mathbb{R}_+^*$

[U] (b) $\begin{cases} x_t = e^t - t \\ y_t = \operatorname{ch} t - \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$

[U] (c) $\begin{cases} x_\theta = 4\sqrt{2}\sin\theta \\ y_\theta = \sin 2\theta \end{cases}$ on se ramènera pour l'étude à $\theta \in [0\ \pi/2]$

[U] (d) $\begin{cases} x_t = a(\ln|\operatorname{tg}\frac{t}{2}| + \cos t) \\ y_t = a\sin t \end{cases}$

[U] (e) $\begin{cases} x_t = \dfrac{2t}{t^2+1} \\ y_t = \dfrac{t^2}{(t-1)^2} \end{cases}$

Ex ④

Etudier et représenter graphiquement les courbes suivantes définies par une équation polaire :

[U] Courbes en polaire (a) $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $a > 0$

[U] (b) $\rho = a\dfrac{\theta}{\theta^2 - 1}$ $a > 0$

[U] (c) $\rho = \dfrac{\operatorname{ch}\theta}{\operatorname{sh}\theta - \operatorname{ch}\theta}$

[U] (d) $\rho = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$ (Exam sept 93)
on se ramènera pour l'étude à $\theta \in [\pi/4\ \ 3\pi/4[$
en particulier justifier la symétrie par rapport à $\theta = \pi/4$

Ex ⑤ [U] Fcts de plusieurs variables/

Quel est l'ensemble de définition de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y}} \text{ si } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ et } f(0,0) = 0$$

Quels sont les lignes de niveau de f ?

Ex ⑥

Les fonctions suivantes ont elles une limite lorsque $M(x, y) \rightarrow O(0,0)$

(a) $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^3 y^3}{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Ex 7

U Différent.

(1) Calculer les dérivées partielles premières et seconde des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = xy$ (b) $f(x,y) = \ln(xy)$ (c) $f(x,y) = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$

(2) Écrire le développement limité à l'ordre 1 au point $(1,1)$ de la fonction $f(x,y) = x\ln y + y\ln x$.

Ex 8

U Intégrales curvilignes

(1) Parmi les formes différentielles suivantes lesquelles sont des différentielles totales, indiquer de quelle fonction.

(a) $x\,dy - y\,dx$ (b) $\frac{x\,dy - y\,dx}{xy}$ (c) $\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$

(2) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_{\overset{\frown}{AB}} -\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy$ $A(2,2)$; $B(1,1)$ (b) $\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$ $A(2,2)$ $B(0,4)$.

Ex 9

U Intégrales curvilignes

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

(1) $\int_{C^+} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ (a) pour C : arc de cercle $x(t) = \cos t$ $y(t) = \sin t$ $0 \leq t \leq \pi/2$

(b) pour C : segment joignant $A(1,0)$ $B(0,1)$.

(2) $\int_{C^+} xy\,dx + (x+y)\,dy$ C^+ est l'arc $\overrightarrow{AB}$ de la parabole d'équation $y = x^2$ avec $A(-1,1)$ $B(2,4)$.

Ex 10

U Intégrales doubles

Calculer les intégrales doubles suivantes :

(a) $\iint_D xy\,dx\,dy$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0 \; x+y \leq 1\}$

(b) $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ D est la surface du triangle de sommets $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,0)$

(c) $\iint_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$ Δ est le disque fermé de centre $(0,0)$ de rayon 1

Ex 11

U Intégrales doubles

1/ Calculer $\iint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy$ où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \; a>0, b>0\}$

On peut utiliser le changement de variable $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\sin\theta$

2/ En déduire $\int_{C^+} -y^3\,dx + x^3\,dy$ où C^+ est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ex 12

Soit D le domaine plan d'aire S limité par une courbe fermée simple $\mathcal{C}^+$.

Sachant que $S = \iint_D dx\,dy$, montrer au moyen de la formule de Green-Rieman que :

$S = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}^+} x\,dy - y\,dx = \int_{\mathcal{C}^+} -y\,dx = \int_{\mathcal{C}^+} x\,dy = \frac{1}{2}\int_{\Delta^+} r^2\,d\theta$ Δ^+ courbe fermé limitant Δ image en polaire de D.

Indications de corrections.

Ex ① on resoud le systeme $\begin{cases} 2t_1 + t_1^2 = 2t_2 + t_2^2 \\ 2t_1 - \frac{1}{t_1^2} = 2t_2 - \frac{1}{t_2^2} \end{cases}$ simplifiez les deux relations par $t_1 - t_2$ on trouve alors $S = t_1 + t_2 = -2$ et $P^2 = (t_1 t_2)^2 = 1$.

par resolution des equations du 2^d on trouve $t_1 = -1+\sqrt{2}$, $t_2 = -1-\sqrt{2}$

Ex ② Folium de Descartes.

- $y = tx \Rightarrow x^3 + t^3x^3 = 3ax(tx) \Rightarrow x(t^3+1) - 3at = 0$ d'ou on deduit

$$x_t = \frac{3at}{1+t^3} \quad y_t = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

- pour $a = 1$ on etudie $x_t = \dfrac{3t}{1+t^3}$ $y_t = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$

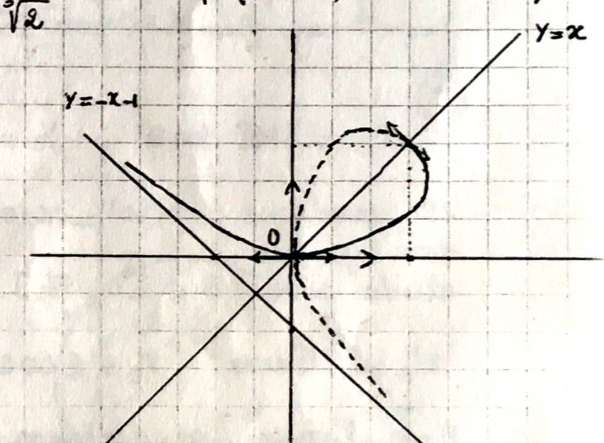
on remarque que $x_{1/t} = y_t$ et $y_{1/t} = x_t$ d'ou sym / 1° bissectrice

Il suffit d'etudier pour $t \in]-1\ 1]$

$$x'_t = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \quad y'_t = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$ racines sont $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < 1$ resp $(t=0,\ t=\sqrt[3]{2} > 1)$

etudes aux bornes.
resumer ds le tableau.
qd $t \to -1$
$\frac{y_t}{x_t} \to -1$ et
$y_t + x_t \to -1$
donc asymptote
$y = -x - 1$

t	-1	0	$1/\sqrt[3]{2}$	1
x'_t		$+$	0	$-$
x_t	$-\infty$ $\nearrow$		$2/\sqrt[3]{2}$ $\searrow$	$3/2$
y'_t	$-$	0	$+$	
y_t	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $2/2^{2/3}$	$3/2$



Ex ③ (a) Astroïde

$x_t = a\cos^3 t$, $y_t = a\sin^3 t$ $\quad a \in \mathbb{R}_+^*$

- 2π periodique ; $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ sym / ox ; $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$ sym/oy ; $x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t)$ et $y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t)$ sym / 1° bissectrice.

Etude sur $[0\ \pi/4]$

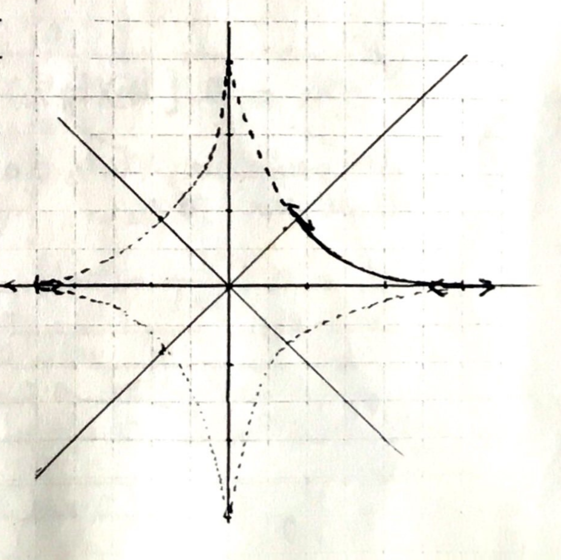
- $x'_t = -3a\sin t\cos^2 t$

$y'_t = 3a\cos t\sin^2 t$

t	0	$\pi/4$
x'_t	0	$-$
x_t	a $\searrow$	$a\frac{\sqrt{2}}{4}$
y'_t	0	$+$
y_t	0 $\nearrow$	$a\sqrt{2}/4$

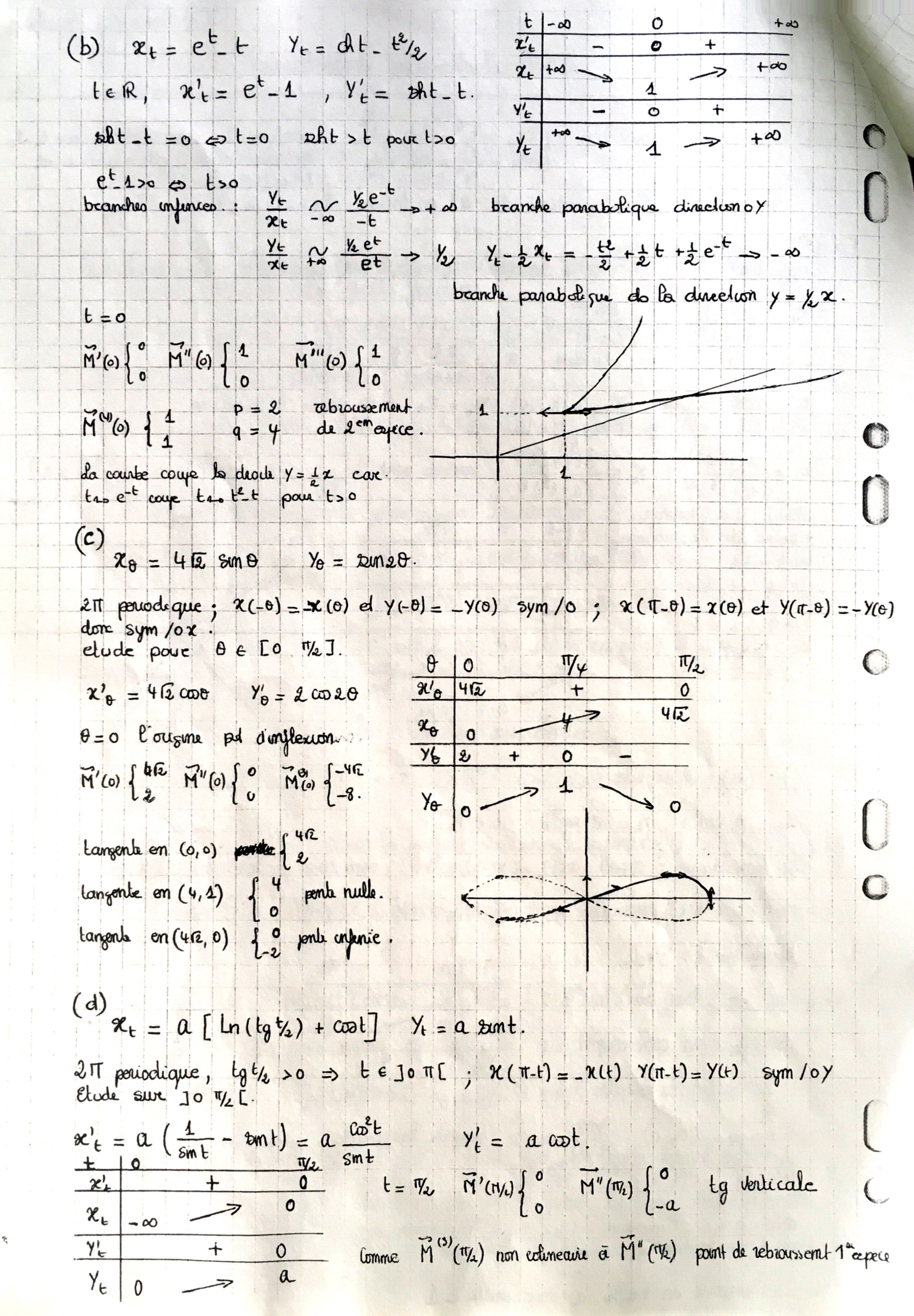
- $t = 0 \leadsto (a, 0)$ $\quad \frac{y'(t)}{x'(t)} \to 0$ tangente horizontale

$\vec{M}'(0)\begin{cases}0\\0\end{cases}$ $\vec{M}''(0)\begin{cases}-3a\\0\end{cases}$ $\vec{M}^{(3)}\begin{cases}0\\6a\end{cases}$



donc $p = 2$ 1er invariant et $q = 3$ 2^{em} invariant
c'est un pt de rebroussement de 1re espece.

- La tangente en $t = \pi/4$ a pour pente -1



(b) $x_t = e^t - t \qquad y_t = \operatorname{ch} t - t^2/2$

$t \in \mathbb{R}, \quad x'_t = e^t - 1 \quad , \quad y'_t = \operatorname{sh} t - t.$

$\operatorname{sh} t - t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \qquad \operatorname{sh} t > t$ pour $t > 0$

$e^t - 1 > 0 \Leftrightarrow t > 0$

t	$-\infty$		0		$+\infty$
x'_t		$-$	0	$+$	
x_t	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y'_t		$-$	0	$+$	
y_t	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

branches infinies : $\dfrac{y_t}{x_t} \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}e^{-t}}{-t} \to +\infty$ branche parabolique direction Oy

$\dfrac{y_t}{x_t} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2}e^t}{e^t} \to \frac{1}{2} \qquad y_t - \frac{1}{2}x_t = -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e^{-t} \to -\infty$

branche parabolique de la direction $y = \frac{1}{2}x$.

$t = 0$

$\vec{M}'(0)\begin{cases}0\\0\end{cases} \quad \vec{M}''(0)\begin{cases}1\\0\end{cases} \quad \vec{M}'''(0)\begin{cases}1\\0\end{cases}$

$\vec{M}^{(4)}(0)\begin{cases}1\\1\end{cases} \qquad \begin{matrix}p = 2\\ q = 4\end{matrix}$ rebroussement de 2ème espèce.

La courbe coupe la droite $y = \frac{1}{2}x$ car
$t \mapsto e^{-t}$ coupe $t \mapsto t^2 - t$ pour $t > 0$

(c)
$x_\theta = 4\sqrt{2}\sin\theta \qquad y_\theta = \sin 2\theta.$

2π périodique ; $x(-\theta) = -x(\theta)$ et $y(-\theta) = -y(\theta)$ sym / O ; $x(\pi-\theta) = x(\theta)$ et $y(\pi-\theta) = -y(\theta)$
donc sym / Ox.
étude pour $\theta \in [0 \ \ \pi/2]$.

$x'_\theta = 4\sqrt{2}\cos\theta \qquad y'_\theta = 2\cos 2\theta$

θ	0		$\pi/4$		$\pi/2$
x'_θ	$4\sqrt{2}$		$+$		0
x_θ	0	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$4\sqrt{2}$
y'_θ	2	$+$	0	$-$	
y_θ	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$\theta = 0$ l'origine pt d'inflexion

$\vec{M}'(0)\begin{cases}4\sqrt{2}\\2\end{cases} \quad \vec{M}''(0)\begin{cases}0\\0\end{cases} \quad \vec{M}^{(3)}(0)\begin{cases}-4\sqrt{2}\\-8.\end{cases}$

tangente en $(0,0)$ $\begin{cases}4\sqrt{2}\\2\end{cases}$

tangente en $(4,1)$ $\begin{cases}4\\0\end{cases}$ pente nulle.

tangente en $(4\sqrt{2},0)$ $\begin{cases}0\\-2\end{cases}$ pente infinie.

(d)
$x_t = a\left[\ln(\operatorname{tg} t/2) + \cos t\right] \qquad y_t = a\sin t.$

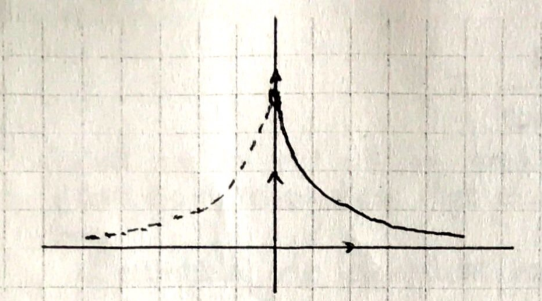
2π périodique, $\operatorname{tg} t/2 > 0 \Rightarrow t \in]0\ \pi[$; $x(\pi - t) = -x(t)$ $y(\pi-t) = y(t)$ sym / Oy
Etude sur $]0\ \pi/2[$.

$x'_t = a\left(\dfrac{1}{\sin t} - \sin t\right) = a\dfrac{\cos^2 t}{\sin t} \qquad y'_t = a\cos t.$

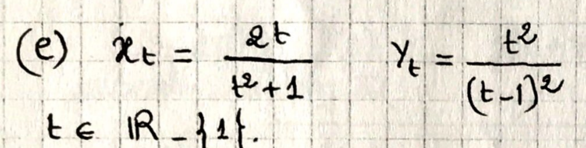
t	0		$\pi/2$
x'_t		$+$	0
x_t	$-\infty$	$\nearrow$	0
y'_t		$+$	0
y_t	0	$\nearrow$	a

$t = \pi/2 \quad \vec{M}'(\pi/2)\begin{cases}0\\0\end{cases} \quad \vec{M}''(\pi/2)\begin{cases}0\\-a\end{cases}$ tg verticale

Comme $\vec{M}^{(3)}(\pi/2)$ non colinéaire à $\vec{M}''(\pi/2)$ point de rebroussement 1ère espèce



courbe décrite par la roue arrière d'une voiture se rangeant en marche avant le long d'un trottoir



(e) $x_t = \dfrac{2t}{t^2+1}$ $\quad y_t = \dfrac{t^2}{(t-1)^2}$

$t \in \mathbb{R} - \{1\}$.

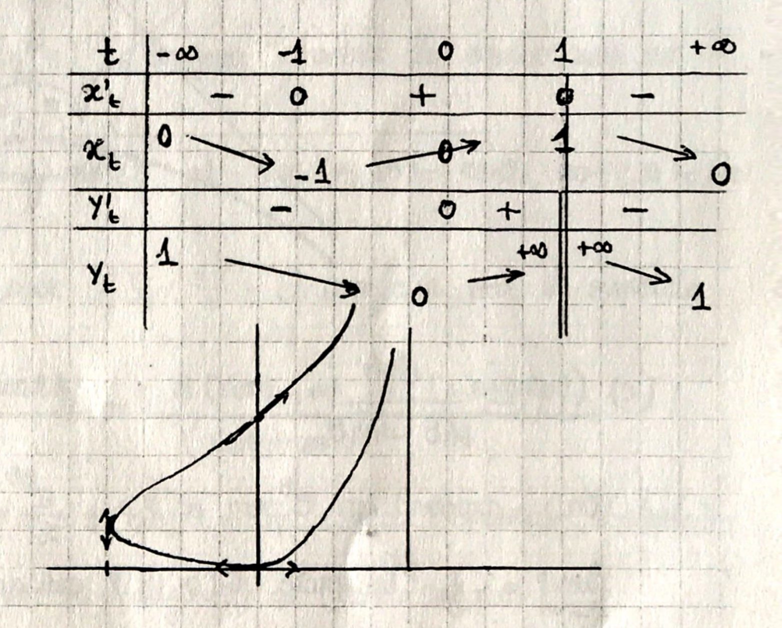
$\lim_{\infty} x_t = 0 \quad \lim_{\infty} y(t) = 1$ ~~asymptote~~ non !

$\lim_{1} x_t = 1 \quad \lim_{1} y_t = +\infty$ asymptote

$x'_t = \dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \quad y'_t = \dfrac{-2t}{(t-1)^3}$

$A(0,1)$ est un point limite ($t \to \pm\infty$)

on a $\dfrac{y'_t}{x'_t} \xrightarrow{\infty} 1$ tangente de pente 1.



t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x'_t		$-$	0	$+$			0	$-$	
x_t	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0
y'_t		$-$			0	$+$	‖	$-$	
y_t	1	↘			0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

Ex ④

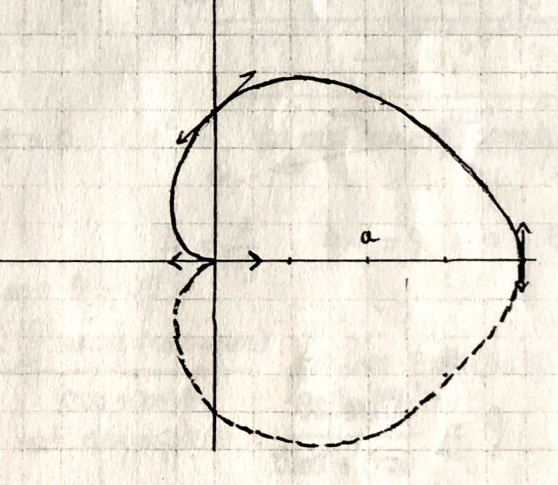
(a) $\rho = a(1+\cos\theta) \quad a>0$

Période 2π, $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ sym / ox

étude sur $[0\ \pi]$

θ	0		π
ρ	$2a$	↘ ⊕	0

$\rho' = -a\sin\theta$



$\theta = \pi \quad \rho = 0$ axe polaire est tangente

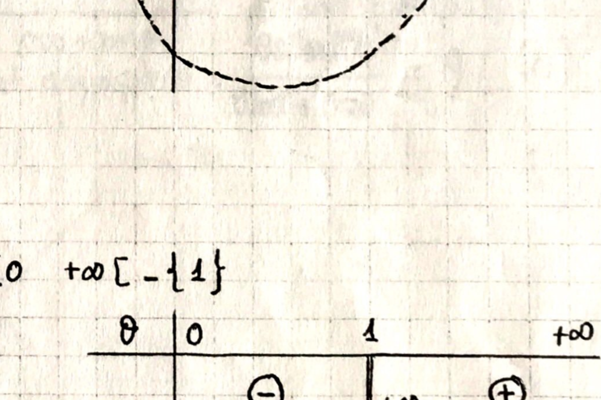
$\theta = 0 \quad \rho' = 0$ tangente verticale / OM.

$\theta = \pi/2 \quad \rho = a \quad \operatorname{tg} V = \dfrac{\rho}{\rho'} = -1 \quad (-\pi/4)$

(b) $\rho = a\dfrac{\theta}{\theta^2-1} \quad a>0$

$\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ donc sym / oy Étude sur $[0\ +\infty[- \{1\}$

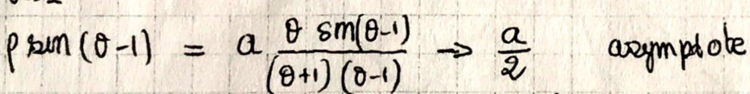
$\rho' = -a\dfrac{\theta^2+1}{(\theta^2-1)^2} < 0$



θ	0		1		$+\infty$
ρ	0	↘ ⊖	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ ⊕	0

$\theta = 0, \ \rho = 0$ tangente axe polaire.

$\lim_{\theta\to 1} \rho(\theta) = \infty$ direct asymp. $\theta = 1$

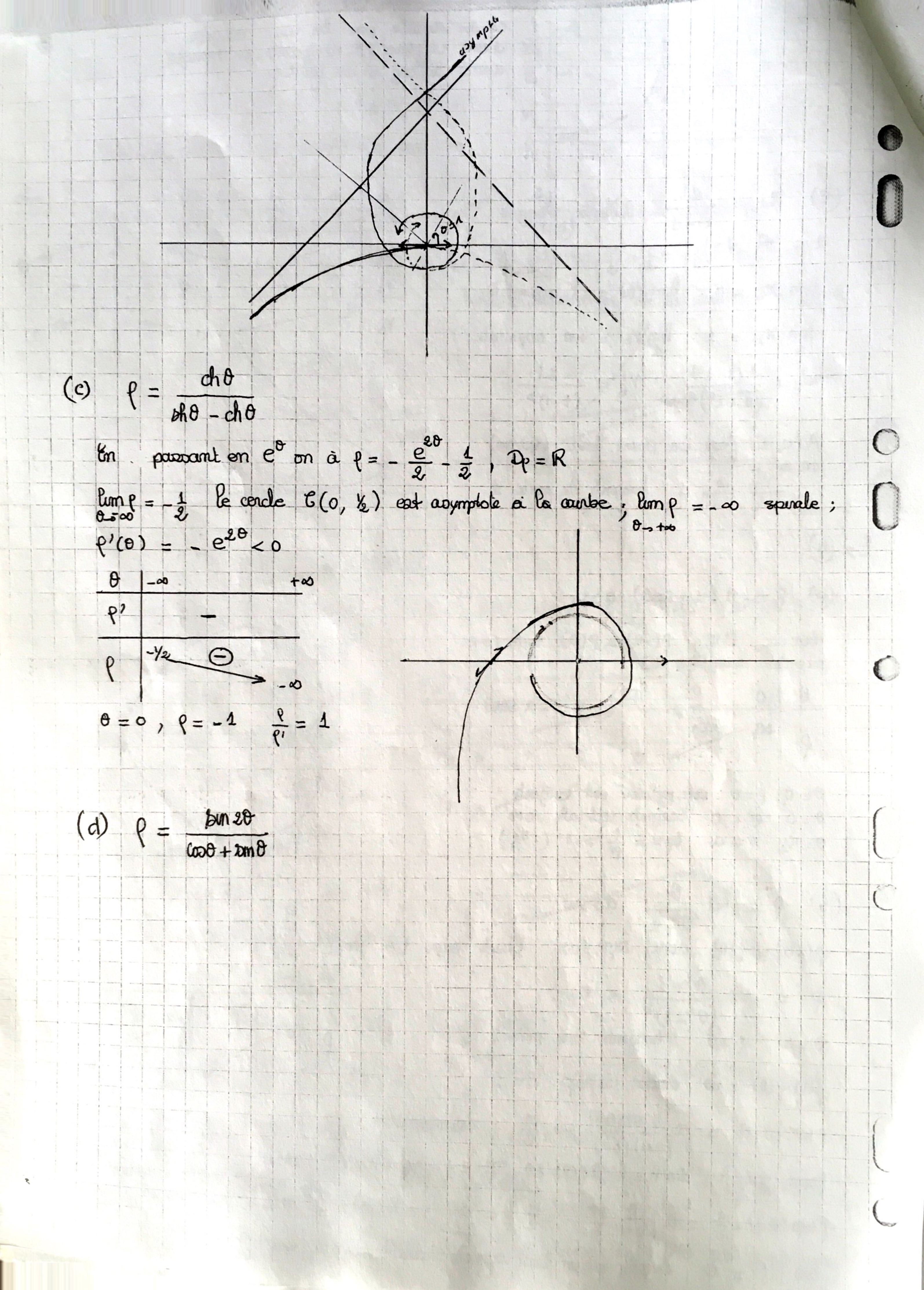


$\rho\sin(\theta-1) = a\dfrac{\theta\sin(\theta-1)}{(\theta+1)(\theta-1)} \to \dfrac{a}{2}$ asymptote

Posons $\theta - 1 = h$ $\quad \sin h = h + h\varepsilon_1(h)$ et $\dfrac{h+1}{h+2} = \dfrac{1}{2} + h/4 + h\varepsilon_2(h)$ d'où

$\rho\sin(\theta-1) - \dfrac{a}{2} = a\left[\dfrac{\theta}{\theta+1}\dfrac{\sin(\theta-1)}{\theta-1} - \dfrac{1}{2}\right] = a\left(\dfrac{h}{4} + h\varepsilon(h)\right)$ $\begin{cases} \theta \to 1^+ \Rightarrow \text{au dessus} \\ \theta \to 1^- \Rightarrow \text{en dessous} \end{cases}$

$\lim_{\theta\to\infty} \rho(\theta) = 0$ Le pôle est un point asymptote (courbe s'enroule sur O).



(c) $\rho = \dfrac{\text{ch}\,\theta}{\text{sh}\,\theta - \text{ch}\,\theta}$

En passant en e^{θ} on à $\rho = -\dfrac{e^{2\theta}}{2} - \dfrac{1}{2}$, $D_\rho = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\theta \to -\infty} \rho = -\dfrac{1}{2}$ le cercle $\mathcal{C}(0, \frac{1}{2})$ est asymptote à la courbe ; $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \rho = -\infty$ spirale ;

$\rho'(\theta) = -e^{2\theta} < 0$

θ	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
ρ'	$-$
ρ	$-1/2$ ↘ $-\infty$ ⊖

$\theta = 0$, $\rho = -1$ $\quad \dfrac{\rho}{\rho'} = 1$

(d) $\rho = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$

$$\rho = \frac{\sin 2\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = f(\theta)$$

- $\cos\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta + \sin\theta \neq 0$

$(\cos\theta \neq 0$ et $\cos\theta + \sin\theta = 0) \Leftrightarrow tg\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

donc

l'ensemble de definition est $\mathbb{R} - \{\frac{3\pi}{4} + k\pi\}$

$f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$; $f(\theta+\pi) = -f(\theta)$, On peut etudier la courbe sur un intervalle de long π.

$f(\pi/2 - \theta) = f(\theta)$ car $\sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta$ et $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$, $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$
Il y a symetrie par rapport à $\theta = \frac{\pi}{4}$.

On peut donc etudier la courbe sur $[\pi/4 \ \frac{3\pi}{4}[$ et completer par la symetrie.

••
$$\rho' = \frac{2\cos 2\theta(\cos\theta + \sin\theta) - (\cos\theta - \sin\theta)\sin 2\theta}{(\cos\theta + \sin\theta)^2} = \frac{2(\cos\theta - \sin\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta)}{(\cos\theta + \sin\theta)^2}$$

$\rho' = 0 \Leftrightarrow (\cos\theta - \sin\theta) = 0 \Leftrightarrow tg\,\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \pi/4$ (sur l'ensemble d'etude)

On remarque que $(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}) \Rightarrow (\sin\theta > 0$ et $\cot g\theta < 1) \Rightarrow (\cos\theta - \sin\theta < 0)$

$(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}) \Rightarrow (\sin\theta > 0$ et $\cos\theta < 0) \Rightarrow (\cos\theta - \sin\theta < 0)$

θ	$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$
ρ'	0		$-$		
ρ	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	⊕ ↘	0	⊖ ↘	$-\infty$

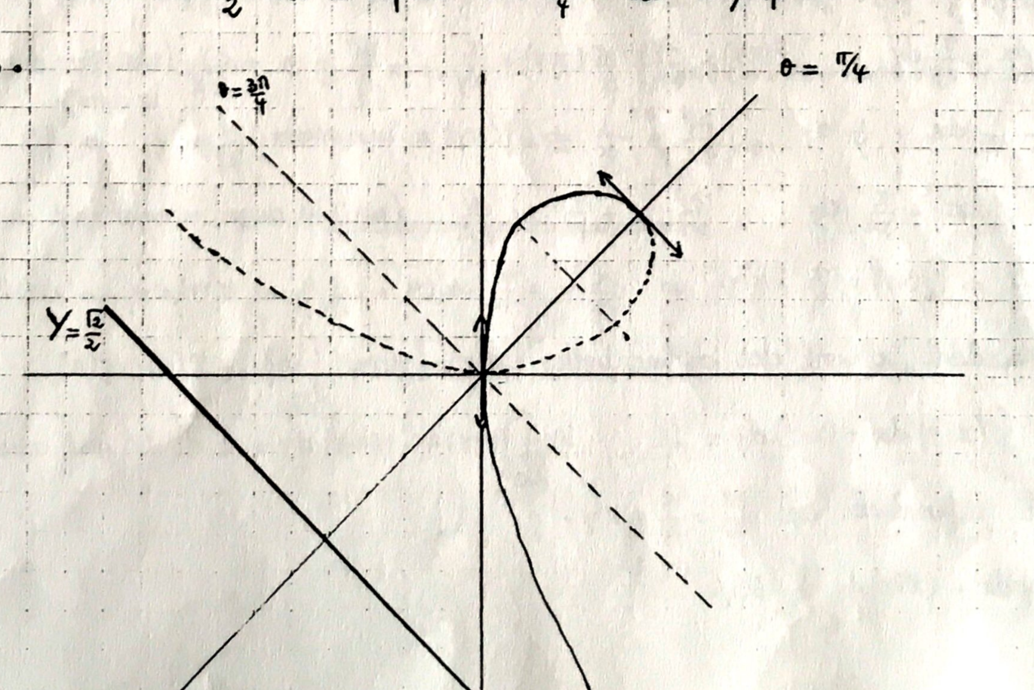
- $\theta = \frac{\pi}{4}$ $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $tg V = \frac{\rho}{\rho'} = \infty$ Verticale dans le repere "$\theta = \pi/4$"
- $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\rho = 0$ $\rho' \neq 0$ pt ordinaire, tangente est $\theta = \pi/2$

••• $\lim_{\theta \to \frac{3\pi}{4}} f(\theta) = -\infty$ direction asymptotique $\theta = \frac{3\pi}{4}$

$$\rho\sin(\theta - \tfrac{3\pi}{4}) = \frac{\sin 2\theta \sin(\theta - 3\pi/4)}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta(\cos\theta + \sin\theta)}{\cos\theta + \sin\theta} \Rightarrow \lim_{\theta \to \frac{3\pi}{4}} \rho\sin(\theta - \tfrac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La droite $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ds le repere "$\theta = \frac{3\pi}{4}$" est asymptote.

••••



U.A.G. 93/94
UV M12 Analyse. T.D Serie 5

Corrigé.

Ex ⑤ Exterieur de la parabole d'equation $y = x^2$, plus l'origine.

La ligne de niveau $f(x,y) = k$ est l'axe OY pour $k = 0$
est la demi parabole d'equation $y = \frac{k^2-1}{k^2}x^2$ $k \neq 0$ et $xk \geq 0$

Ex ⑥ a) $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ avec la definition de la limite $\lim_{0} f(x,y) = 0$.

on peut ecrire $0 \leq |f(x,y)| \leq |x+y|$ et utiliser la continuité de $(x,y) \to |x+y|$, on peut montrer (le faire une fois) que $\lim_{0} |x+y| = 0$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ / si $d(M,0) = \sqrt{x^2+y^2} < \alpha$ alors
$|x| < \sqrt{x^2+y^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|y| < \frac{\varepsilon}{2}$ donc $|x+y| < |x| + |y| < \varepsilon$

b) $f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ on peut remarquer que $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow |f(x,y)| \leq \frac{x^2y^2}{2}$
donc $\lim_{M \to 0} f(M) = 0$ 2e solution : $f(x,y) = \rho^4\cos^3\theta\sin^3\theta$
$|f(x,y)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \rho^4|\cos^3\theta\sin^3\theta| \leq \varepsilon \Leftarrow \rho^4 \leq \varepsilon \Leftrightarrow \rho \leq \varepsilon^{1/4}$

c) $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$ En polaire $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ $(x,y) \to (0,0) \Leftrightarrow r \to 0$ et
quand $r \to 0$ $f(r,\theta) \to +\infty$ (si $\theta \neq -\frac{\pi}{4}$ $[\pi]$)

d) Pas de limite car si on prend la direction $y = 2x$ et $y = x$ on a des limites $\neq$s

Ex ⑦

(1) calculs à faire.

(2) $(x_0, y_0) = (1,1)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$ $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$ $f(1,1) = 0$

$f(x_0+h, y_0+k) = h + k + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$ ou en posant $x = x_0+h$ $y = y_0+k$. $\lim_{0} \varepsilon(h,k) = 0$

$f(x,y) = x + y - 2 + \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\,\varepsilon(x,y)$ $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \varepsilon(x,y) = 0$

Ex ⑧ a) $x\,dy - y\,dx$ on a $P(x,y) = -y$ $Q(x,y) = x$ $\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$

b) $\frac{-y}{xy}dx + \frac{x}{xy}dy$ $P(x,y) = \frac{-y}{xy}$ $Q(x,y) = \frac{x}{xy}$ $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (sur tout disque ne rencontrant pas les axes)

$\omega = -\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy$ $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x,y) = -\ln x + k(y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} \Rightarrow f(x,y) = \ln\left|\frac{y}{x}\right|$

c) $\omega = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$ $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (sur tout disque ne rencontrant pas l'axe ox)

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \Rightarrow f(x,y) = \frac{x}{y} + k(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + k'(y) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow k'(y) = 0 \Rightarrow k(y) = k$, $f(x,y) = \frac{x}{y} + k$

.. est evident, ce sont des differentielles exactes donc $\int_{\widehat{AB}} df = f(B) - f(A)$.

Ex ⑨ 1°/ a) $\int_{C^+} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy = -1$ b) $\int_{C^+} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy = -1$ On peut aussi remarquer que c'est la differentielle de $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xy$.

2°) $\int_{C^+} xy\,dx + (x+y)\,dy = 69/4$

Ex (10)

a) calcul directe simple $\int_D xy\,dx\,dy = 1/24$

b) utiliser la projection H de A pour couper le triangle en 2 $\iint_D (x+y)\,dx\,dy = 4/3$ je trouve $\frac{8}{6}$

c) $\Delta = \{(x,y) / x^2+y^2 \leq 1\}$. en Polaire Δ se transforme en $D = \{(r,\theta) / 0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$\iint_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_D \frac{r}{1+r^2}\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \times \left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr\right) = \pi \ln 2$$

Ex (11)

$$I = \iint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

1°) image de Ω par le chgt de variable est $\Omega' = \{(\rho,\theta) / 0<\rho<1 , 0<\theta<2\pi\}$

Le jacobien $J = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho$ d'où l'intégrale I devient :

$$\iint_{\Omega'} (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\,ab\,\rho^3\,d\rho\,d\theta = ab\int_0^1 \rho^3\,d\rho \cdot \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} - d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2\cos 2\theta}{2} - \frac{b^2\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \pi[a^2+b^2] \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}[a^2+b^2].ab$$ E

2°) $\int_{C^+} -y^3dx + x^3dy = \iint_D (3x^2+3y^2)\,dx\,dy = 3I = \frac{3\pi}{4}[a^2+b^2].ab$

Ex (12)

$$S = \iint_D dx\,dy.$$

Formule de Green-Rieman dit que $\int_{C^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

Prendre successivement $P(x,y) = -y$ et $Q(x,y) = x$; $P(x,y) = -y$ $Q(x,y) = 0$; $P(x,y) = 0$ $Q(x,y) = x$

$x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$. $\frac{1}{2}\int_{C^+} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\Delta^+} r\cos\theta(\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) - r\sin\theta(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta)$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Delta^+} r^2\,d\theta.$$